論文審査の結果の要旨

氏名　　　櫻井　真

超弦理論は自然界の重力を含むすべての相互作用を統一する理論として期待されて研究が続けれられている．まだ最終目標に到達するにはほど遠い現状ではあるが，その数学的構造に関する理解は，純粋数学の様々な分野にも影響を与えながら着実に進展している．また，そうした影響のもとで数学者により得られた新たな洞察や方法が，逆に超弦理論の物理学的取り扱いや数学的見方に新しい観点を示唆するなどの点で物理学の立場からの理論の進展にも有用な役割を果たすことが期待できる．

超弦理論の現在の定式化は，弦の時空での運動の軌跡に対応する２次元面上の場の理論としての共形場の理論を主要な道具として用いている．共形不変性が成立していると，弦を伝わる振動モードは，一般に右向き，左向きモードを基本的に独立に取り扱える．それぞれのモードごとに対称性に対応する閉じた代数構造を定義することができ，それらは一般にカイラル代数と呼ばれる構造を持つ．近年，このカイラル代数そのものを２次元場の理論から一応切り離して，それとは独立な立場から，公理論的に定義してその構造を調べるという研究が，Beilinson，Drinfeld 等を初めとする数学者によってなされている．しかし，それらの結果は物理学者が従来親しんできている方法とはかなり異なった仕方で得られているため，物理学の立場からその結果を表現し直し，物理学者が有効に活用できるものにする作業も重要な仕事として位置づけることができる．

本論文の目的は，カイラル代数がグローバルな意味で矛盾なく定義できるための条件として数学者によって得られている結果に関して，物理学者の立場から Witten と Nekrasov によってなされた先行する二つの独立した研究に基づき，さらにその関係を考究し，お互いの間の整合性を具体的な標的空間を例として確かめることにある．従って，本論文はカイラル代数に関して従来まで未知の全く新しい結果を提出したものではないが，これまでその整合性が自明でなかった条件およびその表現方法に関して具体的な例によりその同等性を確認しようとしている点で意義がある．

本論文の概要を述べる．論文は５つの章と，二つの付録から構成されている．第１章 Introduction では，Beilinson-Drinfeld のカイラル代数の立場を簡潔に要約した後，その定義に関して数学者 Malikov-Schechtman-Vaintrob によって提唱されたパッチ領域の貼り合わせに基づいたカイラル代数の構成法における障碍が，標的空間の第１ポントリャーギンクラスに他ならないことが説明されている．本論文では，この条件を共形場理論の

量子異常の立場から見直すことを提案した Witten と Nekrasov の方法に基づき，デル・ペッソ (del Pezzo) 曲面と呼ばれる特別な複素２次元代数曲面の場合について計算して整合性を確かめることが目的であるとされる．第２章 OPE of chiral de Rham complex: Malikov-Schechtman and Nekrasov では，Witten によって取り扱われている $\beta-\gamma$ 系と呼ばれる２次元共形場理論におけるカイラル代数の貼り合わせを調べるための準備として，演算子積展開の方法を Nekrasov の仕事に基づきレビューしている．第３章 Witten's $\mathbb{CP}^2$ case では，まず標的空間が $\mathbb{CP}^2$ の場合について，Witten が提唱した量子異常項に対する公式が，第２章で説明された Nekrasov の演算子展開に基づいた方法から得られるかどうかが議論されている．両者は一致した結果を与え，互いに整合的であることが確認されている．第４章 Case of del Pezzo surfaces が本論文の主要部分を成す．ここでは，第３章において $\mathbb{CP}^2$ の場合に整合性が確認された計算方法を標的空間 X が del Pezzo 曲面の場合について応用する．del Pezzo surface は，$\mathbb{CP}^2$ からブローアップという方法で得られる．ブローアップされる点の個数が n のとき，第１ポントリャーギンクラス $p_1(X)$ あるいはそれと同等である第２チャーンクラス $ch_2(X)$ は $3(n-1)$ に等しいことが，代数曲面に対するリーマン・ロッホ定理からわかる．Witten および Nekrasov が論じた量子異常が，数学者達によって提唱されたカイラル代数の貼り合わせによる定義に対する障碍と同等だとすると，Witten-Nekrasov に従った演算子展開から $ch_2(X)$ の表式が得られるべきである．そこで，実際に $n=1,2,3$ について演算子展開による計算を実行してこの事実が確かめられている．第５章 Conclusion and future direction では，本論文の結果について簡潔に要約がなされた後，今後の課題，特に論文提出者が目指すいくつかの方向に関して触れられている．付録 A Wess-Zumino-Witten term では，Nekrasov の論文で主張されている，量子異常と Wess-Zumino-Witten 有効作用との関係について補足的な議論が成されている．また，付録 B Toric diagrams and birational geometry は，del Pezzo 曲面を得るときに用いるトーリック図形の方法についての簡単な説明が本文への補足として述べられている．

以上のように，本論文は，カイラル代数をグローバルに定義する際の障碍に関して，必ずしも自明ではなかった先行する研究の整合性を明確にした上で，さらにこれまで扱われていない具体例において第１ポントリャーギンクラスの演算子展開による導出を行った点で，今後の研究に役立つ結果を与えたと評価できる．

よって，審査委員会は全員一致で本論文は，博士（理学）の学位を授与するのにふさわしいものであると判定した．