論文の内容の要旨
マリアバン解析を用いた漸近展開と数理ファイナンスへの応用

篠島 靖文

要旨

本論文は，マリアバン解析の漸近展開理論の数理ファイナンスへの応用についての研究である．マリアバン解析に基づく確率密度の漸近展開は Bismut [2] に始まり，Watanabe [10] や Kusuoka-Stroock [8], [9] により基礎が築かれた．さらに，数理ファイナンスへの多くの応用が Yoshida [11], Takahashi-Kunitomo [7] によりなされた．ここでは，具体的にはヨーロピアンコールオプションのインプライドボラティリティの漸近展開への応用を考える．

まずインプライドボラティリティについての簡単な定義を述べておこう．原資産価格過程を X とし，満期 T，ストライクレート K のヨーロピアンコールオプションのフォワード価値 $V(T,K)$ は，満期 T のフォワード測度の下で

$$V(T,K)=E[(X(T)-K)_+].$$

により与えられる．ここで $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ を

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad G(x)=\int_x^\infty(y-x)\phi(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}$$

により定義する．原資産過程が以下のガウス過程に従うとき，

$$d\tilde{X}(t)=\sigma d\tilde{W}(t),\ \tilde{X}(0)=x_0,$$

コールオプションのフォワード価格は

$$V_N(T,K,\sigma)=\sigma\sqrt{T}G\Big(\frac{K-x_0}{\sigma\sqrt{T}}\Big)$$

により与えられるが，このとき，$\sigma_N(T,K)>0$ で

$$V(T,K)=V_N(T,K,\sigma_N(T,K)),$$

を満たすものをインプライドノーマルボラティリティと呼ぶ．同様に，原資産価格が以下の対数正規過程に従うとしたとき

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{\tilde{X}(t)}=\sigma d\tilde{W}(t),\ \tilde{X}(0)=x_0,$$

コールオプションのフォワード価格は Black-Scholes 式

$$V_{BS}(T, K, \sigma_L) = x_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

により与えられる．ただし，Φ は正規分布関数とし，

$$d_{1,2} = \frac{\log(x_0/K) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

とする．このとき，$\sigma_{BS}(T, K) > 0$ で

$$V(T, K) = V_{BS}(T, K, \sigma_{BS}(T, K))$$

を満たすものをインプライドボラティリティと呼ぶ．

実際の金融市場においては，コールオプションの価格は，このインプライドボラティリティを用いてクォートされており，またストライクレート毎に異なるボラティリティの値を取る．また多くの市場で "ボラティリティスマイル" と呼ばれる形状が観測され，それを説明できるモデルを考えることは実務上非常に重要な問題である．通常，いくつかのモデルを除いて，コールオプション価格の解析解は知られていないことから，インプライドボラティリティの近似式を得ることが重要になる．例えば，Berestycki-Busca-Florent [1] らによる非線形偏微分方程式を用いた研究等が有名であるが，実務的にも広く使われているのが，Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward [5] による特異摂動法を用いた SABR モデルの漸近展開である．

$(\Omega, \mathcal{F}, Q, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T})$ を完備確率空間として通常の条件を満たすものとする．T-フォワード測度のもとで, 以下のモデルを仮定する．

(1)
$$\begin{aligned}
dX(t) &= \varepsilon\alpha(t)\sigma(X(t))dW_1(t),\\
d\alpha(t) &= \varepsilon\nu\alpha(t)dW_2(t),\\
d\langle W_1, W_2\rangle &= \rho dt,\ X(0) = x_0,\ \alpha(0) = \alpha.
\end{aligned}$$

このモデルは，確率ボラティリティモデルのひとつで，特に，$\sigma(x) = x^\beta$ の場合には実務家の間では'SABR モデル' と呼ばれる．ここで考えたい問題は，SABR モデルのインプラドノーマルボラティリティである．

Theorem 1 (Hagan-Kumar-Lesniewski-Woodward). *$\varepsilon \downarrow 0$ のとき, SABR モデルのインプライドノーマルボラティリティは以下で与えられる．*

$$\begin{aligned}
\sigma_N(K) = &\frac{\alpha(x_0 - K)}{\int_K^{x_0}\frac{dx}{\sigma(x)}}\left(\frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)}\right)\\
&\left\{1 + \varepsilon^2\left[\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24}\alpha^2\sigma^2(X_{av}) + \frac{1}{4}\rho\nu\alpha\gamma_1\sigma(X_{av}) + \frac{2 - 3\rho^2}{24}\nu^2\right]T + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

ただし,

$$x_{av} = \sqrt{x_0 K}, \gamma_1 = \frac{\sigma'(x_{av})}{\sigma(x_{av})}, \gamma_2 = \frac{\sigma''(x_{av})}{\sigma(x_{av})},$$

$$\zeta = \frac{\nu}{\alpha}\frac{x_0 - K}{\sigma(x_{av})},\ \hat{x}(\zeta) = \log\frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho}$$

とする．

本論文において，まず，ボラティリティスマイルが期間構造を持った場合を説明するのに必要な，モデルの変数 ν や ρ が時間に関する確定的な関数の場合を扱った Dynamic SABR モデルに拡張して以下の結果を得た．

Theorem 2. 各 $y \in \mathbb{R}$ に対して, $K_\varepsilon = K_\varepsilon(y) = x_0 + \varepsilon\Sigma_n y = x_0(1+\varepsilon\Sigma_l y)$, $\varepsilon \in (0,1]$ とする．各 $r \in [0,\infty)$ に対して, 定数 $R>0$ が存在してインプライドノーマルボラティリティとインプライドボラティリティはそれぞれ以下を満たす.

$$(1) \quad \Big|\frac{\sigma_N(T,K_\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\Sigma_n}{\sqrt{T}}\Big\{1+\varepsilon\Big(\frac{\gamma_1}{2}+C_1\Big)\Sigma_n y + \varepsilon^2\Big(\frac{2\gamma_2-\gamma_1^2}{12}+C_2\Big)(\Sigma_n y)^2 + \varepsilon^2\Big(\frac{2\gamma_2-\gamma_1^2}{24}+\frac{\gamma_1}{2}C_1+C_3\Big)\Sigma_n^2\Big\}\Big| \le \varepsilon^3 R,\ \varepsilon\in(0,1],\ y\in[-r,r].$$

$$(2) \quad \Big|\frac{\sigma_{BS}(T,K_\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\Sigma_l}{\sqrt{T}}\Big\{1+\varepsilon\Big(\frac{\tilde\gamma_1}{2}+\tilde C_1\Big)\Sigma_l y + \varepsilon^2\Big(\frac{2\tilde\gamma_2-\tilde\gamma_1^2-\tilde\gamma_1}{12}-\frac{\tilde C_1}{2}+\tilde C_2\Big)(\Sigma_l y)^2 + \varepsilon^2\Big(\frac{2\tilde\gamma_2-\tilde\gamma_1^2+2\tilde\gamma_1}{24}+\frac{1+\tilde\gamma_1}{2}\tilde C_1+\tilde C_3\Big)\Sigma_l^2\Big\}\Big| \le \varepsilon^3 R,\ \varepsilon\in(0,1],\ y\in[-r,r].$$

ただし

$$\xi = \Big(\int_0^T \sigma^2(t)dt\Big)^{1/2},\ C(x)=b(x)/x,\ \Sigma_n = b(x_0)\alpha\xi,\ \Sigma_l = C(x_0)\alpha\xi,$$
$$\gamma_1 = \frac{b'(x_0)}{b(x_0)},\ \gamma_2 = \frac{b''(x_0)}{b(x_0)},\ \tilde\gamma_1 = \frac{C'(x_0)x_0}{C(x_0)},\ \tilde\gamma_2 = \frac{C''(x_0)x_0}{C(x_0)},$$

とする．いくつかの定数についてはここでは省略した．

さらに実務上重要な長期の通貨オプションに対応するために，金利に確率過程を（ここでは，ガウス型 HJM モデルを仮定した），為替に SABR モデルを適用したモデルを考え，そのモデルの下で通貨オプションのインプライドボラティリティの漸近展開式を導いた．

次に，より一般的でかつ精度の高いインプライドボラティリティの漸近展開公式を考えるために，Kusuoka-Stroock の漸近展開理論を用いる．そのために必要な定理をいくつか準備しよう．$(\Theta, \|\cdot\|_\Theta)$ を可分なバナッハ空間，$(H, \|\cdot\|_H)$ を可分なヒルベルト空間とし，さらに H は Θ の稠密な部分空間で包含写像は連続とする．次に μ_s, $s\in[0,\infty)$, を $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ 上の確率測度で以下を満たすとする．

$$\int_\Theta \exp[\sqrt{-1}\langle\lambda,\theta\rangle]\mu_s(d\theta) = \exp(-\frac{s}{2}\|\lambda\|_H^2), \quad \lambda\in\Theta^*.$$

$f:(0,\infty)\times\Theta\times Y\to\mathbb{R}$, $g:(0,\infty)\times\Theta\times Y\to\mathbb{R}$ と $F:(0,\infty)\times\Theta\times Y\to\mathbb{R}^N$ を完備 P-正則なウィーナー汎関数とし，Y を $\mathbb{R}^N$ のコンパクトな部分集合とする．このとき，Kusuoka-Stroock [8] は以下を証明した．

Theorem 3 (Kusuoka-Stroock). 各 $s\in(0,1]$ に対して, $\mathbb{R}^N$ 上の符号付測度 $P_s(\cdot)$ を

$$P_s(\Gamma) = \int_{F(s,\theta)\in\Gamma} g(s,\theta)\exp[\frac{f(s,\theta)}{s}]\mu_s(d\theta),\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

により定義すると，滑らかな密度関数 $p_s(\cdot)$ を持つ．さらに，$\{a_n\}_0^\infty \subseteq C(Y;\mathbb{R})$ と $\{K_n\}_0^\infty \subseteq (0,\infty)$ が存在して，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\left|(2\pi s)^{N/2}e^{e(y)/s}p_s(y;0)-\sum_{m=0}^{n}s^{m/2}a_m(y)\right|\leqq K_n s^{n(n+1)/2},\ (s,y)\in(0,1]\times Y.$$

を満たす．ただし，$e:\mathbb{R}^n\to(-\infty,\infty]$ を

$$e(x)\equiv\inf\{\frac{\|h\|_H^2}{2}-f(0,h):F(0,h,y)=x\},\quad x\in\mathbb{R}$$

とする．

本論文において，さらに $a_0(y)$ を以下のように具体的に与えることができた．

Theorem 4. e は Y の近傍で滑らかで

$$a_0(y)=\det\nabla^2 e(y)^{\frac{1}{2}}\det{}_2(I_H-B(y))^{-\frac{1}{2}}\exp\Big(\sum_{l=1}^{N}\nabla_l e(y)\mathcal{A}F^l(0,h(y))+\mathcal{A}f(0,h(y))\Big),\quad y\in Y,$$

が成り立つ．ただし

$$B(y)\equiv\sum_{l=1}^{N}\nabla_l e(y)D^2F^l(0,h(y))+D^2f(0,h(y))$$

とする．ここで $\nabla_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\nabla_{ij}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^i,\partial x^j}$，とし $\nabla^2 e(y)=(\nabla_{ij}^2 e(y))_{1\le i,j\le N}$ とする．．

さらに，この定理を確率微分方程式の解に対して適用しよう．$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を完備確率空間として $\{W^1(t),\cdots,W^d(t)\ ;\ t\in[0,T]\}$ を d-次元 ブラウン運動とする．$X_\varepsilon(t)$, $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,1]$ を以下の確率微分方程式の解とする．

$$dX_\varepsilon^i(t)=\sum_{k=1}^{d}\varepsilon V_k^i(t,X_\varepsilon(t))dW^k(t)+V_0^i(t,X_\varepsilon(t))dt,\quad 1\le i\le N,\tag{2}$$
$$X_\varepsilon(0)=x_0=(x_0^1,\ldots,x_0^N),\quad x_0\in\mathbb{R}^N,$$

ただし $V_0,\cdots,V_d\in C_b^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ とする．ここで，$V_0^1\equiv 0$ と $V_1,\cdots,V_d$, の x_0 における強楕円性を仮定する．

まず，関数 e から考えよう．H を Cameron-Martin 空間とし，(2) に対応する常微分方程式

$$\frac{d}{dt}y^i(t;h)=\sum_{k=1}^{d}V_k^i(t,y(t;h))\dot{h}^k(t)+V_0^i(t,y(t;h)),\quad t\in[0,T],\quad h\in H,$$
$$y(0;h)=x_0,\quad x_0\in\mathbb{R}^n$$

を考える．ここで関数 e はパスのエネルギー

$$e(y)=\inf\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^T|\dot{h}^i(s)|^2ds;h\in H,\ y^1(T;h)=y\Big\}$$

と書ける．本論文では，このエネルギー関数の漸近展開を与えることができた．以下にその結果を説明しよう．

まず，$V_0^1 \equiv 0$ であることから，エネルギー関数は $e(x_0^1) = 0$ を満たす．$\varepsilon = 0$ の場合に対応して，フロー $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を

$$\frac{d}{dt}\phi(t,x) = V_0(t,\phi(t,x)), \quad t \in [0,T],$$
$$\phi(0,x) = x$$

により定義する．また，ベクトル場 V の ϕ_t によるプッシュフォワードを以下で定義する．

$$\tilde{V}_k^i(t,y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(-t,\phi(t,y))V_k^j(t,\phi(t,y)), \quad 1 \le i \le N, \quad 1 \le k \le d.$$

このとき，リーマン計量 $(g^{ij})_{1\le i,j\le N} : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$g^{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{d} \tilde{V}_k^i(t,x)\tilde{V}_k^j(t,x),\ 1 \le i,j \le N$$

により定義する．また拡散過程の生成作用素を L_t, $t \in [0,T]$

$$(L_t f)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} g^{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

とする．ただし，$b \in C_b^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ は

$$b^i(t,y) = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{m=1}^{d} \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^l}(-t,\phi(t,y))V_m^k(t,\phi(t,y))V_m^l(t,\phi(t,y))$$

とする．次に線形作用素 V，Γ を以下で定義する．

$$(Vf)(t,x) \equiv \sum_{i=1}^{N} g^{1i}(t,x)\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x^i}(s,x)ds,$$
$$\Gamma(f,g)(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{N}\int_0^T g^{ij}(t,x)\Big(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x^i}(s,x)ds\Big)\Big(\int_t^T \frac{\partial g}{\partial x^j}(s,x)ds\Big)dt.$$

このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 5. 定数 $r_0 > 0$ と $C_0 > 0$ が存在して，エネルギー関数 e は以下を満たす．

$$\Big|e(y) - \Big[\frac{1}{2b_1}(y-x_0^1)^2 - \frac{b_2}{3b_1^3}(y-x_0^1)^3 + \Big(-\frac{b_3}{4b_1^4} + \frac{b_2^2}{2b_1^5}\Big)(y-x_0^1)^4\Big]\Big| \le C_0|y-x_0^1|^5,$$

ただし，変数 b_1，b_2，b_3 は，

$$b_1 = \int_0^T g^{11}(t,x_0)dt,\ b_2 = \frac{3}{2}\int_0^T (Vg^{11})(t,x_0)dt,$$
$$b_3 = 2\int_0^T (V^2 g^{11})(t,x_0)dt + \frac{1}{2}\Gamma(g^{11},g^{11})(x_0)$$

とする．

さらに，定理 4 を用いて確率密度関数の漸近展開は以下のように求められる．

Theorem 6. 定数 $r_0, C_1, C_2 > 0$ が存在して，確率密度関数 $p_\varepsilon(y)$ は以下を満たす．

$$\Big|(2\pi\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{e(y)}{\varepsilon^2}\Big)p_\varepsilon(y) - a_0(y) - \varepsilon^2 a_2(y)\Big| \le \varepsilon^4 C_1, \quad y \in [x_0^1 - r_0, x_0^1 + r_0].$$

ここで，a_0，a_2 は連続関数で次を満たす．

$$\Big|a_0(y) - \Big(\frac{\partial^2 e(y)}{\partial y^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{L(y - x_0^1)^2}{2b_1^2}\Big)\Big| \le C_2|y - x_0^1|^3,$$

$$a_2(x_0^1) = \frac{1}{\sqrt{b_1}}\Big(-\frac{L}{2b_1} - \frac{5}{6}\frac{b_2^2}{b_1^3} + \frac{3}{4}\frac{b_3}{b_1^2}\Big),$$

ただし，

$$L = \int_{0<u<t<T} L_u(g^{11}(t,\cdot))(x_0)dudt$$

とする．

このとき，拡散過程 (2) に従うモデルで X_ε^1 を原資産とするコールオプションの価値の漸近展開は以下で与えられる．

Theorem 7. 定数 C_1 が存在してストライクレート K, 満期 T のコールオプションの価値は次を満たす．

$$\big|\sqrt{2\pi}\exp(\frac{e(K)}{\varepsilon^2})C_\varepsilon(T,K) - \varepsilon a_0(K)q(K)^2\varphi_1(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon})(1 + R_2(\varepsilon,K))\big| \le C_1\varepsilon^4,$$

ただし

$$\begin{aligned}R_2(\varepsilon,K) &= \varepsilon q(K)\Big(\frac{a_0'(K)}{a_0(K)} + \frac{3}{2}\frac{q'(K)}{q(K)}\Big)\frac{\varphi_2(\sqrt{2e(K)}/\varepsilon)}{\varphi_1(\sqrt{2e(K)}/\varepsilon)} + \varepsilon^2 q(K)^2\Big[\frac{1}{2}\frac{a_0''(K)}{a_0(K)}\\&\quad + 2\frac{a_0'(K)}{a_0(K)}\frac{q'(K)}{q(K)} + \frac{7}{6}\Big(\frac{q'(K)}{q(K)}\Big)^2 + \frac{2}{3}\frac{q''(K)}{q(K)}\Big]\frac{\varphi_3(\sqrt{2e(K)}/\varepsilon)}{\varphi_1(\sqrt{2e(K)}/\varepsilon)} + \varepsilon^2\frac{a_2(K)}{a_0(K)},\\\varphi_n(x) &= \int_0^\infty z^n\exp(-xz - \frac{z^2}{2})dz, \quad x \ge 0.\end{aligned}$$

とし，q を x_0^1 の近傍で以下の関係式により定義する．

$$e(x) = \frac{1}{2}\Big(\int_{x_0^1}^x \frac{dy}{q(y)}\Big)^2, \quad x \in [x_0^1 - r_0, x_0^1 + r_0].$$

最後に，これからインプライドノーマルボラティリティの漸近展開式を得る．

Theorem 8 (一般化 SABR 公式). インプライドノーマルボラティリティの漸近展開は以下で与えられる．

$$\Big|\Big(\frac{\varepsilon|K - x_0^1|}{\sqrt{2e(K)T}}\Big)^{-1}\sigma_N(T,K) - \exp(J)\Big| \le C(\varepsilon + |K - x_0^1|)^3, \quad K \in [x_0^1, K_1],$$

ただし

$$J=\frac{|K-x_0^1|^2}{b_1^2}\Big(\frac{L}{2}+\frac{1}{6}\frac{b_2^2}{b_1^2}-\frac{1}{4}\frac{b_3}{b_1}\Big)\varphi_1(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon})+\frac{\varepsilon^2}{b_1}\Big(-\frac{L}{2}-\frac{5}{6}\frac{b_2^2}{b_1^2}+\frac{3}{4}\frac{b_3}{b_1}\Big)\varphi_1(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon})$$
$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{b_1}}\frac{|K-x_0^1|}{b_1}\Big(L+\frac{2}{3}\frac{b_2^2}{b_1^2}-\frac{3}{4}\frac{b_3}{b_1}\Big)\varphi_2(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon})+\frac{\varepsilon^2}{b_1}\Big(\frac{L}{2}+\frac{b_2^2}{2b_1^2}-\frac{b_3}{2b_1}\Big)\varphi_3(\frac{\sqrt{2e(K)}}{\varepsilon})$$

とする．

特に，SABR モデルに対しては，エネルギー関数は，$\zeta=-\frac{\nu}{\alpha}\int_{x_0}^K\frac{dz}{C(z)}$ として

$$e_{sabr}(K)=\frac{1}{2\nu^2T}\log(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}-\rho+\zeta}{1-\rho})^2=\frac{\hat{x}(\zeta)^2}{2\nu^2T}$$

により与えられ，$\exp(J)$ を x_0 の近傍でテーラー展開することにより

$$\sigma_N(T,K)=\frac{K-x_0}{\sqrt{2e_{sabr}(K)T}}\Big(1+\Big[\frac{2\sigma(x_0)\sigma''(x_0)-\sigma'(x_0)^2}{24}\alpha^2$$
$$+\frac{1}{4}\rho\nu\alpha\sigma'(x_0)+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\Big]T\Big)$$

が得られる．この式は，もともとの SABR 公式とほぼ一致している．

参考文献

[1] Berestycki, H., Busca, J., and Florent, I. (2004): *Computing the implied volatility in stochastic volatility models*, Comm. Pure Appl. Math., 57, num. 10, 1352-1373.

[2] Bismut, J. M.: *Large Deviations and the Malliavin Calculus*, Birkhauser-Boston, Boston (1984).

[3] Black, F., Scholes, M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81, 637-654.

[4] Dunford, N and Schwartz, J. T. (1988), *Linear Operators, Part II*, Wiley-Interscience, New York.

[5] Hagan, P. S., Woodward, D. E: *Equivalent Black Volatilities*, Appl. Math Finance 6, 147-157 (1999).

[6] Hagan, P. S., Kumar D., Lesniewski, S. Woodward, D. E.: *Managing smile risk*, Wilmott Magazine 18, no. 11, 84-108 (2002).

[7] Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001): *The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims*, Mathematical Finance, 11, 117-151.

[8] Kusuoka, S. and Stroock, D. W.: *Applications of Malliavin calculus, Part I*, Proceedings of the Taniguchi Intern. Symp. on Stochastic Analysis, Kyoto and Katata, 1982, ed. by K. Ito, 271-360, Kinokuniya, Tokyo (1984).

[9] Kusuoka, S. and Stroock, D. W., *Precise Asymptotics of Certain Wiener Functionals*, J. Funct. Anal., 99 (1991), 1-74.

[10] Watanabe, S. (1987): *Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its application to heat kernels*, Ann. Probab, 15, 1-39.

[11] Yoshida, N. (1992): *Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimators for Small Diffusions via the Theory of Malliavin-Watanabe*, Probability Theory and Related Fields, 92, 275-311.