# 論文内容の要旨

論文題目　Exact Analysis on Stochastic Processes of Interacting Particle Systems
~~（~~相互作用する多粒子系の確率過程における厳密な解析~~）~~

氏　名　　有 田 親 史

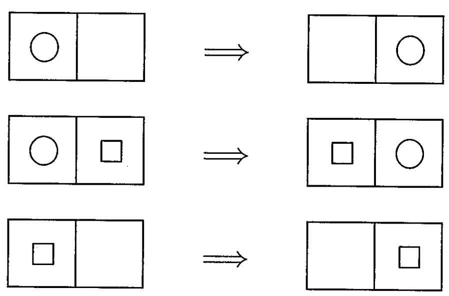
非対称単純排他過程（asymmetric simple exclusion process, ASEP）は確率過程によって定式化された１次元離散空間上の非平衡系のモデルである。粒子に課せられたルールは，微小時間当たり左右に異なるある遷移率でホップすることと，各サイトに粒子は１つまでしか入れないことと，境界条件である。ASEP は MacDonald らによって 1968 年にメッセンジャー RNA 上を動くリボソームのモデルとして提唱された。1993 年に Derrida らによって開放境界条件下で行列積型の定常状態が発見されると同時に境界のパラメータによる相転移が厳密に示されて以来，特に注目されるようになった。全サイト数を $L$ として，ある時刻にある配列 $(\tau_1, \ldots, \tau_L)$ が実現される確率を $P(\tau_1, \ldots, \tau_L)$ とおく。それらを縦に並べた確率ベクトル $|P\rangle\!\rangle$ を用いると，系の時間発展が従うマスター方程式は行列 $\mathcal{H}$ を用いて

$$\mathcal{H}|P\rangle\!\rangle = \frac{d}{dt}|P\rangle\!\rangle$$

のように書くことが出来る。$\mathcal{H}$ は一般には非エルミートであり，また最大の固有値は 0 である。
本論文は多成分に拡張された ASEP について，以下に述べる３つの研究をまとめたものである。

<u>第２章</u>　開放境界条件下の２成分 totally ASEP（TASEP）の定常状態の性質

各サイト $j$ は空 $(\tau_j = 0)$，第１粒子 $(\tau_j = 1)$，第２粒子 $(\tau_j = 2)$ の３状態をとるものとする。以下のようなホッピングのルールと境界条件を考える。



遷移率 1，

遷移率 1，

遷移率 1，

○は第1粒子，□は第2粒子を表すものとする。第1粒子は左端で遷移率 $\alpha$ で注入され $\beta$ で放出されるものとする。また第2粒子は両端で出入りがないものとする。上述のように開放境界条件下の ASEP には行列積型の定常状態があり，拡張された ASEP に関してもシステマティックに行列積型の定常状態を構成する方法が確立されている（行列積仮説）。行列積仮説を用いると定常状態の解は

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_L) = \frac{1}{Z_L} \langle W|\, X_{\tau_1} \cdots X_{\tau_L}\, |V\rangle$$

と書ける。ただし $X_\tau$ $(\tau = 0, 1, 2)$ は行列，$\langle W|$ は横ベクトル，$|V\rangle$ は縦ベクトルとし

$$X_1 X_0 = X_0 + X_1,\ X_2 X_0 = X_2,\ X_1 X_2 = X_2,\ \alpha\langle W|\, E = \langle W|,\ \beta D\, |V\rangle = |V\rangle$$

を満たすものとする。これを利用して定常状態における物理量（粒子の流れと密度）を計算すると，境界のパラメータを軸として3つの相ができ，相の境界での相転移が示される。またバルクの密度と境界付近の密度のずれ方の特徴を表す局在長を計算すると8つの相が現れた。1成分 TASEP の場合，局在長の相図は5つの相であるのに対して新しい結果である。

## 第3章　バルク部分で付着と脱離を許した多成分 ASEP に対する一考察

以下のような $N-1$ 成分の拡張された ASEP を考える（状態数としては空を含め $N$）。各サイト間 $j$ と $j+1$ における粒子の交換

$$\boxed{x}\boxed{y} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y}\boxed{x} \qquad (\text{遷移率 } p_j^{xy})$$

およびサイト $j$ における付着と脱離

$$\overset{y \searrow}{\boxed{x}} \quad \Longrightarrow \quad \overset{\nearrow x}{\boxed{y}} \qquad \text{with a rate } \omega_j^{x \to y} \text{ 。}$$

のあるモデルを考える $(1 \leq x, y \leq N,\ x \neq y)$。この場合，遷移率がサイトに依存しているため，システマティックな行列積仮説が使えない。しかしある条件の下（すなわち遷移率たちに対する制限の下）においては，定常状態の解がスカラーの積の形

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_L) = \frac{1}{Z} D_{\tau_1} \cdots D_{\tau_L}$$

で書けることがわかった。その条件は必要条件として求められるが，十分性も証明できる。また局所的な重み $D_\tau$ たちは遷移率たちから作られる行列の行列積で与えられることを示した。すなわちその条件の下では流れ，密度，同時刻多点相関関数などが任意に計算できてしまう。

## 第4章　周期境界条件下の多成分 ASEP の固有値の性質

以下のような $N-1$ 成分の ASEP を考える（状態数としては空を含め $N$）。

$$\boxed{x}\boxed{y} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y}\boxed{x} \qquad \text{遷移率} \begin{cases} p \ (\text{for } N \geq x > y \geq 1) \\ q \ (\text{for } 1 \leq x < y \leq N) \end{cases} \text{ 。}$$

この過程は実は可積分の模型である Perk-Schultz 模型と等価である。したがってこの過程は代数的ベーテ仮説によって既に解かれているモデルであると言える。周期境界条件を課しているので系全体での粒子数は保存する。したがってハミルトニアンはセクターに直和分解される。粒子 $n$ の数を $a_n$ としてセクターを $1^{a_1}\cdots N^{a_N}$ とラベルする。また $\mathrm{Spec}(s)$ をセクター $s$ における固有値の集合とする。ベーテ方程式に対する考察から，固有値の集合に対する包含関係

$$\mathrm{Spec}(1^{a_1}\cdots N^{a_N}) \supset \mathrm{Spec}(1^{a_1+\cdots a_n}2^{a_{n+1}\cdots a_N})$$

を示した。更に数値計算は " 比較的大きな固有値 " は 2 状態の ASEP の 2 番目に大きな固有値に帰着できることを示唆している。これを認めれば，多成分 ASEP の 2 番目に大きな固有値を含めた比較的大きな固有値は熱力学極限で

$$\begin{aligned} &\sim L^{-\frac{3}{2}} \quad (p \neq q) \\ &\sim L^{-2} \quad (p = q) \end{aligned}$$

のように振舞う。このことは，系の定常状態への緩和が

$$\begin{aligned} &\sim L^{\frac{3}{2}} \quad (p \neq q) \quad \text{Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) スケーリング} \\ &\sim L^{2} \quad (p = q) \quad \text{Edward-Wilkinson (EW) スケーリング} \end{aligned}$$

と振舞うことを示唆している。すなわち動的指数に関する，成分の数に依らない普遍性を示している。