論文内容の要旨

論文題目： The Spectrum of Classical String Theory and Integrability in the AdS/CFT Correspondence

（古典弦理論のスペクトルとAdS/CFT対応に於ける可積分性）

氏名　　鈴木　了

超弦理論はゲージおよび重力相互作用を量子論的に無矛盾に記述する理論であり、場の量子論で常に現れる紫外発散の問題を含まない。超弦理論は、基本弦およびブレーンと呼ばれる広がった物体から構成されている。基本弦同士の相互作用のうち、開弦による相互作用はゲージ相互作用を、閉弦による相互作用は重力相互作用を記述する。

超弦理論には大きな対称性が内在している。とくに同じ物理現象が、弦理論の一見異なる複数の記述の仕方によって表されるとき、これを双対性と呼ぶ。ブレーンの存在する時空中においては、開弦によって計算した量と閉弦によって計算した量が同じであることがしばしば生じる。この状況は open/closed duality あるいはゲージ・重力対応と呼ばれている。

AdS/CFT 対応とは、Maldacena によって提唱されたゲージ・重力対応の具体例の一つである。AdS/CFT 対応は、$SU(N)$ ゲージ群を持つ 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論と、N 単位の RR flux を持つ $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ 時空上の閉弦理論とが、$N\to\infty$ の極限で双対な関係にあることを予言している。より具体的に言えば、AdS/CFT 対応が正しければ、理論のスペクトルやそれらの相関関数を両側の理論で計算した場合、両者が一致するような対応のつけ方が存在するはずである。

両側の物理量を同定するための手がかりとして、両者の大域対称性が一致することを利用できる。$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論には $psu(2,2|4)$ と呼ばれる超共形対称性が存在し、$\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ 時空上の超弦理論においても同じ

$psu(2,2|4)$ 対称性が、時空の幾何学的対称性として実現されている。とくにこの二つの対称性を同一視することで、ゲージ理論における dilatation 演算子 Δ および三種類の R 電荷（J_1, J_2, J_3）は、超弦理論におけるエネルギー E と S^5 上の独立な角運動量の三成分（$\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3$）と一致すべしという物理量の間の具体的な関係が導かれる。

しかしながら、AdS/CFT 対応を証明することは、以下に述べる理由により非常に困難である。この対応の下では、ゲージ理論の結合定数 $\lambda \equiv N g_{\rm YM}^2$ と、重力理論の結合定数 $\lambda = R^4/\ell_{\rm string}^4$ とが同一視される。ゲージ理論で摂動論が使えるのは $\lambda \ll 1$ の領域であり、弦理論で摂動論が使えるのは $\lambda \gg 1$ の領域であるが、どちらの理論においても摂動論の適用範囲を超えて理論の性質を調べることは一般に容易でない。ただし例外として、BPS 演算子と呼ばれる特殊なスペクトルを考えると、これらの演算子については物理量が量子補正を受けないことが知られている。この場合、実際に AdS/CFT 対応が成立する。

BPS 演算子以外の例として、Berenstein, Maldacena, Nastase (BMN) らは、BPS 状態に非常に近い $\mathcal{N}=4$ 理論の演算子を考えた。これらの演算子は、長さ L の複合 BPS 演算子を ${\rm tr}\, Z^L$ としたとき、複素スカラー場 Z 以外の（「不純物」と呼ばれる）$\mathcal{N}=4$ 理論の基本場を数個挿入し、$L \gg 1$ の極限を取ったものとして定義される。これらは BMN sector または near-BPS sector と呼ばれる。BMN は、有効結合定数 $\tilde{\lambda} \equiv \lambda/L^2$ を有限に保つ極限（BMN 極限）を考えた上で、near-BPS sector における演算子が、$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ 時空のペンローズ極限として定義される pp-wave 時空上の閉弦理論の状態と双対であることを示した。

BPS でない一般の演算子の共形次元（すなわち dilatation 演算子の固有値）を求めることは、通常の場の理論においては非常に困難な問題である。なぜなら、同じ量子数を持つ演算子同士は量子効果によって混ざるため、共形次元を求めるには dilatation 演算子を行列とみなしてこれを対角化する必要があるからである。Minahan と Zarembo は、$\mathcal{N}=4$ 理論の dilatation 演算子が可積分性と呼ばれる非常に特殊な性質を持つことを発見した。すなわち彼らは、複合演算子の中の各演算子の flavor を、1+1 次元格子上に固定されたスピンの向きと読み替えることによって、dilatation 演算子が可積分格子模型の Hamiltonian と同じ形を持つことを示した。もし Hamiltonian が可積分ならば、Bethe Ansatz 方程式と呼ばれる方程式を解くことで、BPS とは限らない複雑な状態の固有値も（原理的には）計算することができる。とくに、演算子の長さ L および不純物の数が非常に大きくなる「熱力学極限」を取れば、Bethe Ansatz 方程式は比較的単純な（特異）積分方程式に帰着されるため、Hamiltonian の非自明な固有状態を具体的に構成することができる。

ゲージ理論の発展とは独立に、Bena, Polchinski, Roiban らは $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ 上の古典弦の運動方程式が可積分であり、無限個の保存チャージを含むことを発見した。この発見を受け、Kazakov, Marshakov, Minahan, Zarembo (KMMZ) らは、弦の運動方程式および Virasoro 条件の古典解が、finite-gap 定式化と呼ばれる代数幾何学的な方法によって一般的に構成できることを指摘した。さらに KMMZ は、古典弦の角運動量 J が非常に大きくなる「熱力学極限」を取ることで、finite-gap 定式化に現れる積分方程式たちが、Bethe Ansatz 方程式から得られる積分方程式たちと、BMN の有効結合定数 $\tilde{\lambda} \equiv \lambda/J^2$ の最低次で完全に一致することを発見した。

また Beisert は、$\mathcal{N}=4$ 理論において長さ L が無限大の演算子 (asymptotic spin chain) を考えると、超共形対称性の代数を中心拡大することができることを示した。さらに、asymptotic spin chain 上の magnon 励起が中心拡大された意味での BPS 状態である場合、その共形次元が結合定数 λ についての全次数の表式として

$$\Delta - J_1 = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{p}{2}\right)}, \qquad \Delta,\ J_1 \to \infty \tag{1}$$

と書ける事を指摘した。他方弦理論側において、Hofman と Maldacena は、S^5 の大円上を弦の端が光速で回る

配位 (giant magnon) が、asymptotic spin chain 上の magnon 励起と双対な弦の状態であることを発見した。Asymptotic spin chain で $L=\infty$ が成り立つことに対応して、giant magnon も無限大の角運動量 $J_1=\infty$ を持つ解となっている。

以上述べたように、$AdS_5 \times S^5$ 時空上の閉弦理論と 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の間の AdS/CFT 対応を一般的に証明することは困難ながらも、演算子と古典弦との具体的な対応を求め AdS/CFT 対応を検証する試みは大きな成功を収めてきた。この成功の背景は次のようにもまとめられる。各々の理論に存在する可積分性のおかげで、両理論の複雑なスペクトルを求めることができるようになった。それぞれの理論で見つかった多様なスペクトルのうち一部の特殊なものに注目することで（すなわち各々の理論において巧妙な極限を取ることで)、もともとは強結合/弱結合の双対性であった AdS/CFT 対応が、別の種類の比較に置き換わることで AdS/CFT 対応の新しい例を発見してきた。—— このように考えると、可積分性を利用して各々の理論のスペクトルを広い展望から分類することは、AdS/CFT 対応の検証においても重要な役割を果たすであろうことが理解できる。

以前から良く知られていたこととして、$\mathbb{R}\times S^3$ 上の古典弦理論は可積分であり、さらに Pohlmeyer, Lund, Regge (PLR) らの方法に従って力学変数を読み替えることで sine-Gordon 系に還元できるという事実があった。実際に、PLR の処方により giant magnon 解と sine-Gordon 模型のソリトン解とが関係することは、すでに Hofman, Maldacena によって指摘されていた。自分は、東京大学の岡村圭祐氏とともに、複素 sine-Gordon 方程式の helical wave 解と呼ばれる、最も一般的な genus 1 の二重周期関数解に注目して、これを元に $\mathbb{R}_t \times S^3$ 時空上の一般的な弦の古典解を構成した。さらに、種々の極限を取ることで、この解（helical spinning string 解）が、folded string や dyonic giant magnon と言った AdS/CFT でよく知られた古典弦の解に帰着されることを示した。

我々は楕円関数を用いて解析的に helical string 解の表式を与えたが、この事実よりすぐに、 helical string 解は代数幾何学的な手法に従って構成される finite-gap 解と直接の対応があることが期待される。Vicedo は、我々の解が一般的な 2-cut finite-gap 解として表現できることを後に証明し、具体的なパラメータの対応を与えた。ちなみに時空上の古典弦の運動として記述される通常の解と代数幾何学的な解との関係は、実座標と運動量座標とを入れ替える Fourier 変換の非線形な類似とみなすこともできる。AdS/CFT 対応を検証する上では「運動量座標」の表示である代数幾何学的な表現の方が有用である。しかし、これを「Fourier 変換」することで実座標での解の表式を得ること、およびその逆を実際に計算することは、大抵の場合非常に面倒である。この意味において、広い種類の古典弦の解について、その時空上の振る舞いと「運動量空間上」の振る舞いとの対応が明らかになったのは重要だと考えられる。

Helical spinning string 解は、一般に大きな角運動量をもつ弦の古典解を内挿するような一般解であった。われわれは引き続いて、大きな巻きつき数を持つような一般的な弦の古典解を、worldsheet 上の時空座標 τ と σ を入れ替えることで構成した。さらにこの解（helical oscillating string）は、一般に pulsating string や single-spike といった時空上で周期的に振動運動を行う弦の古典解を含むことが示された。AdS/CFT の観点からは、このような解に双対なゲージ理論の演算子は、非正則なスカラーからなる複合演算子であることが期待される。この種の演算子の共形次元は一般に大きな量子補正を受けるため、AdS/CFT 対応の具体例としてはあまり調べられたことがなかった。非正則なセクターと大きな巻きつき数を持つ解の対応を調べる上で、我々の解は有用な示唆を与えると期待できる。

Helical spinning string 解は、(two-spin) giant magnon 解の、$J_1<\infty$ への拡張とみなすことができる。実は、分散関係式 (1) への有限 J_1 補正を求める問題は、以下に述べるように AdS/CFT 対応における重要な問題と関

連している。

$\mathcal{N}=4$ 理論の dilatation 演算子を対角化する際に Minahan と Zarembo が用いた Bethe Ansatz 方程式は、後に Beisert, Dippel, Staudacher によって λ に関する全次数の表式に拡張された。この all-loop Bethe Ansatz は、しかしながら、L が有限の場合は wrapping interaction とよばれる相互作用によって、λ の高次においては $\mathcal{N}=4$ の結果を正しく再現しないことが知られている。Ambjørn, Kristjansen, Janik (AKJ) は、λ の大きな領域では wrapping interaction が、指数関数で減衰するような分散関係式への補正項として現れるべきであることを指摘した。Giant magnon 解への有限 J_1 補正は実際に、J_1 に関して指数関数的に減衰することが知られている。ゆえに、このような項を正確に求める手法は、Bethe Ansatz で計算できないような効果を評価するうえで重要と考えられる。

我々は、2つの方法を用いて (two-spin) giant magnon 解への有限 J_1 補正を計算し、両者が一致することを確かめた。一つ目の方法は上で述べたように helical spinning string 解の漸近的な振る舞いを評価する方法である。もう一つの方法は、場の理論で知られている Lüscher の公式を用いるもので、これは無限サイズの系の情報だけからエネルギーへの有限サイズ補正を求める式になっている。Lüscher の公式を用いる方法は λ の大きさに依らずに適用できるため、もし λ の小さい領域で有限サイズ補正項が評価できれば、AKJ の主張を裏付ける具体的な証拠を与えると期待できる。

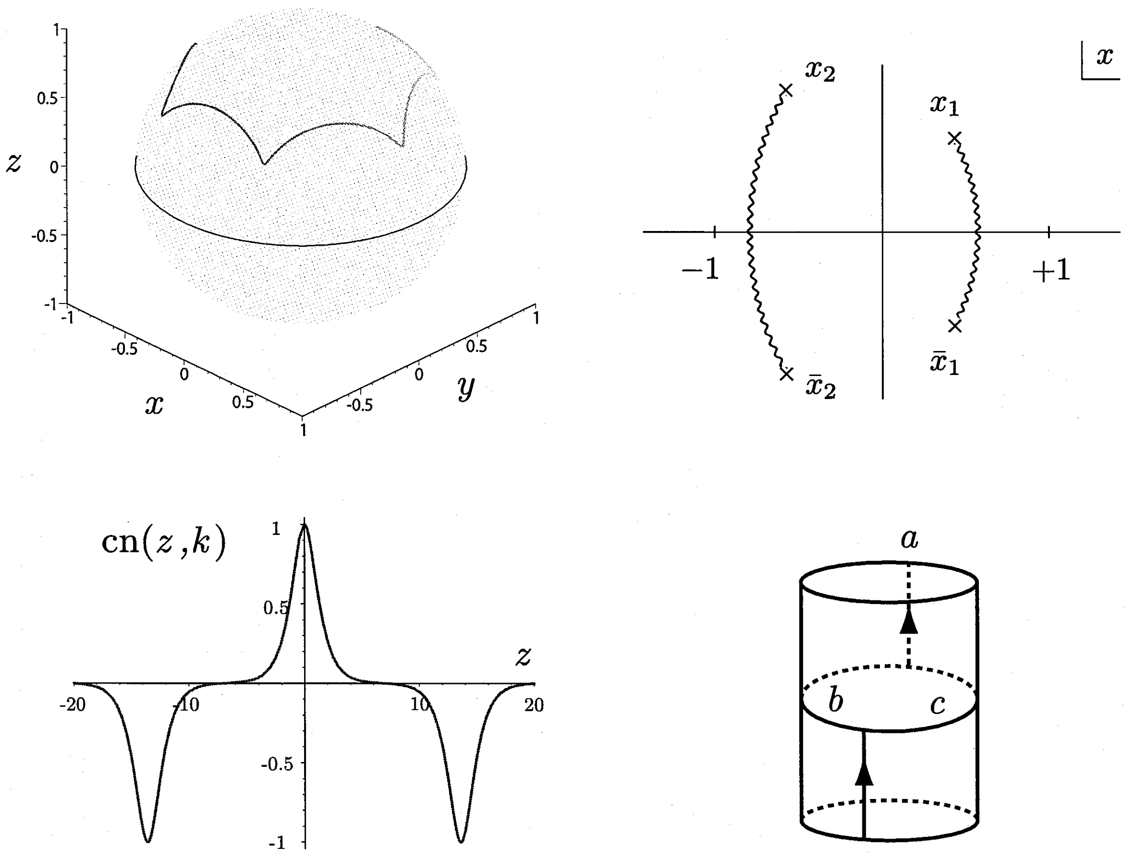

図 1: 左上：S^3 時空における helical spinning string 解の形。左下：対応する複素 sine-Gordon 方程式の helical wave 解。右上：Helical spinning string 解の 2-cut 解としての finite-gap 解釈。右下：有限サイズ補正の一部である μ 項を表す Feynman 図。