

論文内容の要旨

論文題目： スピン軌道相互作用のある不規則系、準周期系
(Disordered and quasiperiodic systems with spin orbit interaction)

氏名： 十倍 大仁郎

当論文における主な目的は、不規則系、準周期系の双方の系において、スピン軌道相互作用を付加することで明確となった新奇の性質を明示することである。双方の系は、ランダム行列理論、量子準位統計の観点から共に重要となるので、当論文では、ランダム行列理論、量子準位統計における観点から1つの一貫した論文としてまとめることを考えた。

第1節では、ランダム行列理論と準位統計の発展の歴史から始まって、第2節以降で必要となる基本的な知識をまとめた。

第2節においては不規則系を扱った。シリンダー型の境界条件を課し、シリンダーを貫く磁束を導入する。磁束を断熱的に変化させることでエネルギー準位が断熱的に変化してゆく様子をスペクトル流と名づけた。不規則ポテンシャルが存在しなければ、それぞれのスペクトル流は全く反発せず準位交差となるのであるが、不規則ポテンシャルの存在下においては準位間に反発が生じ、準位交差が壊れてギャップとなる。この節で注目した統計量は、このギャップの大きさについての確率分布関数 (ギャップ分布関数) である。

まずは Rashba モデルを始めとする幾つかの物理系において、このギャップ分布関数を調べた。その結果、弱い不規則ポテンシャルの領域においては、いずれのモデルにおいても系の大きさに依存しない普遍的なギャップ分布関数が得られた (図 1 (a))。そして、この普遍的なギャップ分布関数と良く一致する試行関数

$$P_{\text{trial}}(\xi) = \frac{a\xi^2}{\sinh(b\xi)} \left[a = \frac{2b^3}{7\zeta(3)}, \quad b = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \right] \quad (1)$$

を見つけることができた。このギャップ分布関数は、ギャップの小さい領域においては“ベキ則”、大きい領域においては“指数関数的減衰”を示す (図 1 (b))。

行列力学モデルに基づいた $N \times N$ ランダム行列理論を用いて、ギャップの小さい領域における“ベキ則”

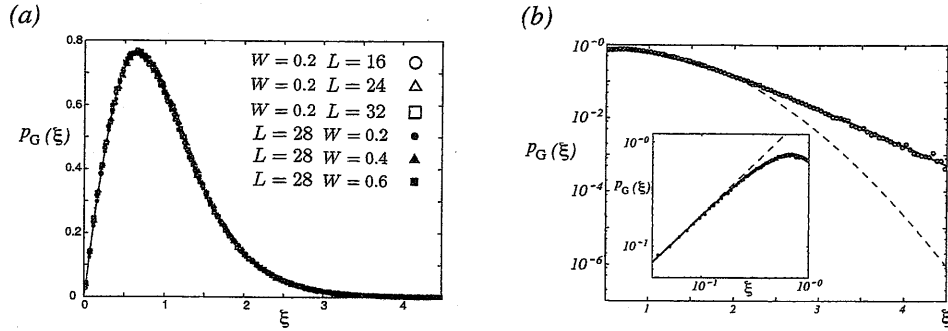


図1 ギャップ分布関数の普遍性 (a) 弱い不規則ポテンシャルにおいて系の大きさ L に依存しない (Rashba モデルの場合の1例)。 (b) ギャップの大きな領域では Poisson 的な減衰を示し、ギャップの小さい領域ではベキ則を示す。 (a)、(b) の図における実線はいずれも試行関数 (1)。

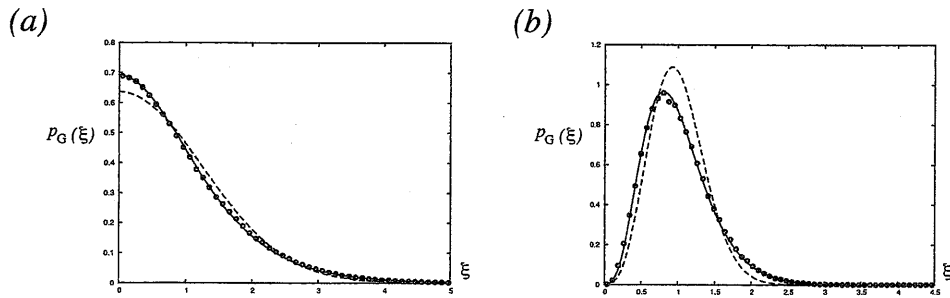


図2 ランダム行列モデル (2) から得られたギャップ分布関数 (a) GOE の場合、(b) GSE の場合。 (a)、(b) の図における実線はそれぞれ、(3) の $\beta = 1$ (GOE) と $\beta = 4$ (GSE) の場合。

が、一般の N で、かつポテンシャルの形に依存せずになり立つ普遍的な性質であることを示した。また、当研究における物理系の特徴を反映したランダム行列モデル

$$H = \alpha H_{\text{cross}} + H_{\text{random}} \quad (2)$$

を考案し、実際の物理系で得られた普遍的なギャップ分布関数の形 (1) を再現することができた。これらの結果から、当研究で得られたギャップ分布関数が、「弱い不規則ポテンシャル」、「準位交差」の2つの特徴を持つ系の普遍的なギャップ分布関数であると結論づけた。

当研究で扱った物理系はいずれも磁束の存在を反映して、ギャップの小さい領域において GUE のベキ則を示していた。GOE、GSE におけるベキ則を満たすよう試行関数 (1) を拡張した：(GOE、GUE、GSE に対応して $\beta = 1, 2, 4$)

$$P_{\text{trial}}(\xi) = \frac{a_{\beta} \xi^{\beta}}{\sinh(b_{\beta} \xi)} \quad (3)$$

そして、「弱い不規則ポテンシャル」と「準位交差」の特徴を反映したランダム行列モデル (2) の GOE、GSE の場合それぞれにおいて、拡張された試行関数 (3) を得ることができた (図2)。当節の研究による結果、弱い不規則ポテンシャル領域におけるギャップ分布関数は、系の大きさ等、系の詳細に依存しない普遍性を示すと結論づけた。またそのギャップ分布関数は、「Poisson 的減衰」と、系の対称性 (GOE、GUE、GSE) に依存

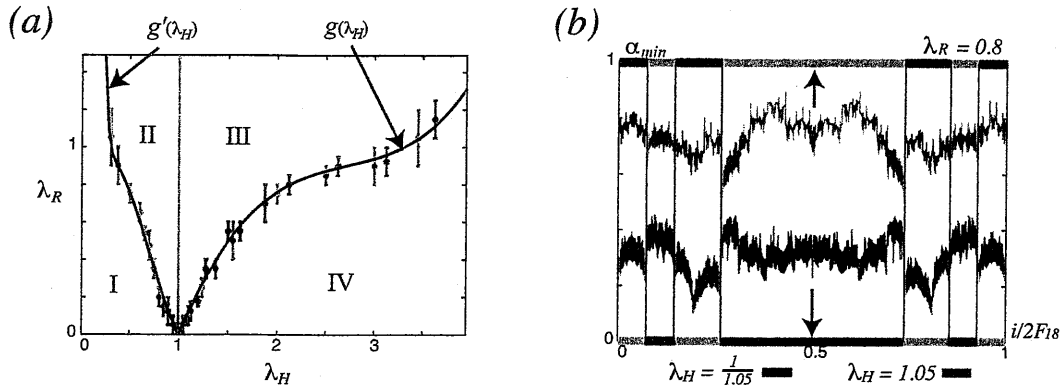


図3 (a) 相図: I相とIV相、II相とIII相はそれぞれ互いに双対関係にある。系は $\lambda_H = 1$ の直線上(赤線)で自己双対である。青いエラーバーは、バンド幅の総和を用いた解析による。緑のエラーバーは、波動関数に対するマルチフラクタル解析による。 $g(\lambda_H)$ と $g'(\lambda_H)$ は双対関係にある: $g'(\lambda_H) = g(1/\lambda_H)$ 。(b) II相とIII相における(全ての状態の波動関数に対する) α_{\min} の値。緑線と青線は $n = 18$ ($F_{18} = 4181$)の場合、薄い緑線と薄い青線は $n \rightarrow \infty$ の極限。

した「ベキ則」の特徴を持つ(3)とよく一致すると結論した。

2節で得られた普遍的なギャップ分布関数(3)は、ギャップの大きさについても規格化されている。規格化する以前のギャップの大きさ g に関する分布関数は、普遍的なギャップ分布関数(3)より、1パラメータ(ギャップの平均値($\langle g \rangle$))のみに依存した形で書き下すことができる:

$$P_G(g) = \frac{1}{\langle g \rangle} P_{\text{trial}}(\langle g \rangle \xi) \quad (4)$$

よって2節では、ギャップの平均値の振る舞いにも調べた。特に熱力学的極限においてもギャップの平均値はゼロとならず、有限の値をとることが数値計算により示された。故に熱力学的極限においても、普遍的なギャップ分布関数の描象が成り立つことが示唆されている。またこれらの結論が反映される系として、特にスピンホールコンダクタンスについて触れている。

スピン軌道相互作用の存在は、当節の普遍性を発見する上で重要であったと考える。というのも、不規則ポテンシャルの弱い極限に相当するギャップ分布関数を数値計算で扱うことは本来は困難を伴う。スピン軌道相互作用は伝導性を誘起することが知られており、これは逆に言えば、不規則ポテンシャルの作用を相対的に抑制すると解釈できる。不規則系研究における初期に、常識的な不規則ポテンシャル強さの範囲内でギャップ分布関数の普遍性に到達できたのは、スピン軌道相互作用のおかげであると考えている。

第3節においては準周期系を扱った。HarperモデルにRashba型のスピン軌道相互作用を付加したモデル、つまり2次元正方格子に垂直磁場の入った1体の強結合モデルにRashba型のスピン軌道相互作用を付加したモデルを考案し、単格格子を貫く磁束を無理数: $\sigma_G = (\sqrt{5} - 1)/2$ とした場合に相当する準周期系を考えた。

まずは当モデルにおいて、Aubry-André双対性を一般化した双対性、スピン軌道相互作用の存在下においても成り立つ双対性の存在を示した。

次に、バンド幅の総和による解析と直接波動関数を見ること、さらに双対性による議論から図3(a)の相図を得た。

そして、バンド幅、波動関数に対するマルチフラクタル解析を行うことで、得られた相図 (図 3 (a)) が矛盾のないものであることを確認した。

任意の λ_R において双対性が成り立つことから、II 相と III 相の境界は自己相似な直線 $\lambda_H = 1$ となっている。その境界線上におけるバンド幅の総和の振る舞いは、 λ_R の値とは関係なく臨界的な $B \sim q^{-\delta}$ ($\delta = 1.00$) を示す。スペクトルに対するマルチフラクタル解析を行い、この直線上においては純粋な特異連続スペクトルが現れること、つまり全ての状態が臨界的であることを確認した。

また波動関数に対するマルチフラクタル解析を行い、各々の相の様子を調べた。I 相と、I 相と双対性の関係により結ばれた IV 相は、それぞれ純粋なスペクトルを持つ。I 相においては純粋な絶対連続スペクトルを持ち、全ての状態は広がっている。また IV 相においては純粋な調密スペクトルを持ち、全ての状態は局在している。それらの相とは対照的に、II 相と、II 相と双対性の関係に結ばれた III 相は、いずれも純粋でないスペクトルを持ち、広がった状態と局在した状態が混在する。つまり広がった状態と局在した状態を分ける移動度端が存在する。そしてここでも双対性は成り立っており、II 相における広がった (局在した) 状態は、双対性の関係で結ばれた III 相の対応する状態においては、局在して (広がって) いる (図 3(b))。当研究において考察したモデルはこのように、双対性と移動度端が両立したモデルであることが大きな特徴である。

当研究においては、1次元準周期系にスピン軌道相互作用を付加することで、系の電子構造がどのように変化するかに関心があった。念頭にあるのは、2次元不規則電子系にスピン軌道相互作用を付加することによって Anderson 転移が生じる系となる事実である。通常の1次元不規則系にスピン軌道相互作用を付加しても、依然として絶縁体相であることは知られている。しかし1次元準周期系は、通常の周期系と不規則系の間とも言える系であり、スピン軌道相互作用を付加することによって、どのような電子構造が生じるかは不明であった。当論文の1次元準周期系の研究において、スピン軌道相互作用を付加することでスペクトル中に移動度端が生じ、絶縁体相の一部に金属相が、金属相の一部に絶縁体相が誘起されることが示された。特に当研究では、すべての状態における α_{min} を一度に見ることで、その様子を明確にすることができた (図 3(b))。

第4節は、graphene を扱っている。ここではパラメータ t_a によって六角格子から2つの正方格子へと遷移する graphene モデルを扱い、 $t_a \ll 1$ と $t_a \gg 1$ の極限を調べた。 $t_a \gg 1$ で、六角格子は2つの正方格子に完全に分裂していることを示した。よってホールコンダクタンスの量子化則は、正方格子で知られている通常の量子ホール効果におけるものと一致する。それに対して $t_a \ll 1$ では、ゼロモードの存在のために、正方格子の場合とは異なる選択則に従って Diophantine 方程式の解を選ぶ必要があることを摂動論を用いて示した。そしてそれは、非常に小さい準位間ギャップという graphene 固有の準位構造の存在と関係していることを示した。