論文内容の要旨

論文題目
Non-Hermitian quantum mechanics of strongly correlated systems
~~(~~強相関系の非エルミート量子力学~~)~~

氏名　中村 祐一

本論文を通じ，強相関量子系の低エネルギー励起領域の素励起分散関係の複素運動量空間内での零点の虚部が相関長逆数に等しいことを予想する。

自由粒子系においては，零点の虚部と相関長逆数が等しいことは，明確な議論で導かれる。しかし，強相関量子系においては，その対応関係は明確ではない。S=1/2 の XYZ スピン鎖において，奥西らは２個のスピノン励起の分散関係の零点の虚部が，相関長逆数の２倍に等しいことを示した[1]。我々は，ハーフフィルドのハバード模型において，チャージ励起の分散関係の零点の虚部が，相関長逆数に等しいことを数値的に示した。以上の結論を踏まえ，分散関係の零点の虚部が相関長逆数に等しいという性質は，一次元強相関量子系において普遍的に成り立つと予想する。

複素運動量空間内の分散関係を，実軸上での分散関係を複素平面へ解析接続することにより定義する。この解析接続が複素運動量空間のどの領域で成り立つかについては過去に議論されていない。そこで，我々は分散関係の解析接続がどの領域で成り立つかを詳しく議論するために，運動量虚部が g（g は実数）の軸上での分散関係を求めることが，どのようなハミルトニアンを解くことと等価なのかを解析した。

例えば，以下のハミルトニアンで与えられる一次元の強束縛模型

$$H=-t\sum_i (c_{i+1}^\dagger c_i + c_i^\dagger c_{i+1}) \tag{1}$$

を考える。ハミルトニアン(1)は運動量空間で，以下のように対角化される。

$$H_p = \sum_{-\pi<p<\pi} (-2t\cos p) c_p^\dagger c_p \tag{2}$$

ハミルトニアン(2)の運動量 p を $p+ig$ に置き換えることにより，運動量虚部が g となるハミルトニアンの運動量空間内での表式は，

$$H_p(g) = \sum_{-\pi<p<\pi} [-2t\cos(p+ig)] c_p^\dagger c_p \tag{3}$$

となる。ハミルトニアン(3)に逆フーリエ変換を施せば，実空間表示で

$$H(g) = -t\sum_i (e^g c_{i+1}^\dagger c_i + e^{-g} c_i^\dagger c_{i+1}) \tag{4}$$

となる。すなわち，(運動量虚部)=g の軸上で分散関係を求めることは，左右のホッピングエネルギーに exp(g), exp($-g$)を掛けた非エルミートなハミルトニアンを解くことと等価であることが分かる。このような量子系の非エルミート化の手法は，羽田野とネルソン[2]により，初めて導入された。

我々は，強相関量子系において，(運動量虚部)=g の軸上での分散関係を得るための非エルミートなハミルトニアンを予想した。一次元ハバード模型のハーフフィルドの場合は，チャージ励起の分散関係を(運動量虚部)=g 上で得ることは，以下の非エルミートハミルトニアン

$$H = -t\sum_i \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (e^g c_{i+1,\sigma}^\dagger c_{i,\sigma} + e^{-g} c_{i,\sigma}^\dagger c_{i+1,\sigma}) + U\sum_i n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} \tag{5}$$

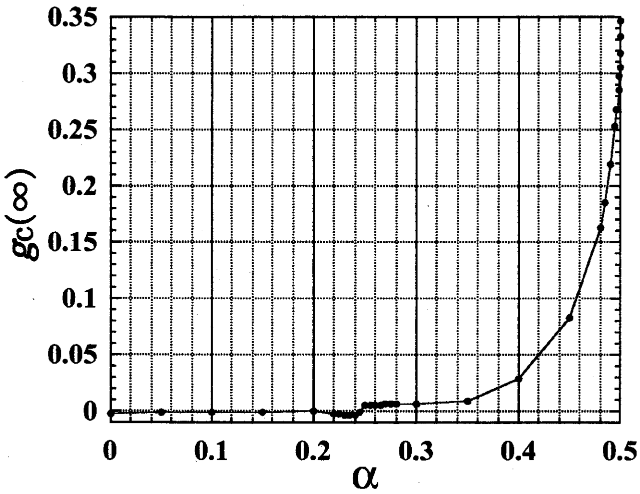
を解くことと等価であると予想した。また，1次元 S=1/2 反強磁性 XXZ 模型においては，1スピノン励起の分散関係を(運動量虚部)=g 上で得ることは，以下の非エルミートなハミルトニアン

$$H = J\sum_{i=1}^{L} [\frac{1}{2}(e^{2g} S_i^- S_{i+1}^+ + e^{-2g} S_i^+ S_{i+1}^-) + \Delta S_i^z S_{i+1}^z] \tag{6}$$

を解くことと等価であると予想した。

更に，これらの模型(5),(6)において，g=0 でギャップを決定する励起状態に対応する固有状態と基底状態間とのエネルギーギャップが g を増加させることによりどのように振る舞うのかを議論した。その結果，模型(5),(6)においてエネルギーギャップが 0 になる点 g_c(以降，g_c をギャップ破壊点と呼ぶことにする。)が，エルミート模型の相関長逆数に等しいことを示した[5]。この結果と，冒頭で述べた予想，すなわち分散関係の零点虚部と相関長逆数とが等しいことを，併せて考えれば，以上の非エルミート模型(5),(6)が，確かに，(運動量虚部)=g 上で分散関係を求めるためのハミルトニアンに対応することが示唆される。また，$g > g_c$ の領域(ギャップ破壊点以降)では基底状態の性質が劇的にかわると期待すれば，複素運動量空間内で分散関係の解析接続が成立する領域は

$$\mathrm{Im}\, p \le g_c$$



図：サイズ外挿(L=4,8,12,16)されたg$_c$のα依存性。

図から，α=0.5(Majumdar-Ghosh 点)で $g_c(\infty)$≒0.36 であるが，この値は，Majumdar-Ghosh 模型[6]の基底状態の相関関数の有限サイズスケーリングから求めた相関長逆数 ln2/2(≒0.347)と定量的に一致する。また，図からαが 0 から 0.25 付近までは $g_c(\infty)$がほぼ 0 で，0.25 付近から 0.5 までは g_cが有限であることが分かる。$g_c(\infty)$が相関長逆数に等しいとすると，αが 0 から 0.25 付近までは相関長が発散することになるが，これは α_c≒0.241 での massive-massless 転移[7]と符合する。以上の数値的考察から，非エルミートハミルトニアン(9)はエルミート模型の相関長を得る目的において，有効なハミルトニアンであることが数値的に確認された。

なお，α≧0.5 の場合は，基底状態はインコメンシュレートな相にある。基底状態の運動量πとギャップを決定する固有状態の運動量が異なるので，２つの固有値がペアで実数・複素数転移することはない。つまり，インコメンシュレートな相では，非エルミートなハミルトニアン(9)は基底状態相関長を求める目的においては有効なハミルトニアンではない。何らかの，別の非エルミートなハミルトニアンの導入が必要であると思われる。

参考文献

[1] K. Okunishi, Y. Akutsu, N. Akutsu and T. Yamamoto, Phys. Rev. B 64 (2001) 104432.
[2] N. Hatano and D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 570; Phys. Rev. B 56 (1997) 8651.
[3] T. Fukui and N. Kawakami, Phys. Rev. B 58 (1998) 16051.
[4] G. Albertini, S. R. Dahmen and B. Wehefritz, Nucl. Phys. B 493 (1997) 541.
[5] Y. Nakamura and N. Hatano, Physica B 378-380 (2006) 292; J. Phys. Soc. Jpn. 75 (2006) 104001.
[6] C. K. Majumdar and D. P. Ghosh, J. Math. Phys. 10 (1969) 1388.
[7] K. Okamoto and K. Nomura, Phys. Lett. A 169 (1992) 433.

であると予想する。

非エルミート模型の複素固有値分布の振る舞い（具体的には，基底状態と励起状態間のエネルギーギャップが $g=g_c$ で潰れ，以降，両固有値は複素化する。）から，系の長さスケールを得るという手法は，ランダムポテンシャル V_i 中の一電子アンダーソン模型

$$H=-t\sum_{i=1}^{L}\left(e^{g}\left|i+1\right\rangle\left\langle i\right|+e^{-g}\left|i\right\rangle\left\langle i+1\right|\right)+\sum_{i=1}^{L}V_i\left|i\right\rangle\left\langle i\right| \tag{7}$$

において羽田野とネルソン[2]により初めて提案された。非エルミートな一電子アンダーソン模型においては，隣接する固有値が潰れ，複素化する点 g_c は，エルミート模型での固有状態が持つ局在長の逆数に等しい。

従って，ランダムネスのある非相互作用系では，量子系の非エルミート化により局在長が固有値分布の振る舞いから出現する。一方，ランダムネスのない強相関量子系では，相関長が出現すると考えられる。

次に，厳密に解けない模型である次近接相互作用の入った S=1/2 反強磁性ハイゼンベルグスピン鎖

$$H=J\sum_{i=1}^{L}\left[\vec{\mathrm{S}}_i\cdot\vec{\mathrm{S}}_{i+1}+\alpha\vec{\mathrm{S}}_i\cdot\vec{\mathrm{S}}_{i+2}\right] \tag{8}$$

について，ハミルトニアン(8)を非エルミート化することにより，エルミート模型の相関長を得られることを数値的に確認した。この模型の相関長を得るためには，以下の非エルミートハミルトニアン

$$\begin{aligned}H=&J\sum_{i=1}^{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2g}S_i^-S_{i+1}^++e^{-2g}S_i^+S_{i+1}^-\right)+S_i^zS_{i+1}^z\right]\\&+\alpha J\sum_{i=1}^{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{4g}S_i^-S_{i+2}^++e^{-4g}S_i^+S_{i+2}^-\right)+S_i^zS_{i+2}^z\right]\end{aligned} \tag{9}$$

の固有値分布の振る舞いを追跡すればよいことを，有限系からの数値計算により予想した。この非エルミートハミルトニアンは，非エルミート XXZ 模型(6)において次近接相互作用の入った場合の拡張とも見なせる。我々は，サイズ L の模型(9)において，無限系で基底状態に対応する固有状態が複素化する点 $g_c(L)$ を数値的に求め，$g_c(L)$をサイズ外挿することにより外挿値 $g_c(\infty)$を得る。以下の図は $0\leqq\alpha\leqq0.5$ の範囲で $g_c(L)$を 2 次近似でフィッティングしたときの外挿値 $g_c(\infty)$である。