

論文内容の要旨

論文題目 Structure of a Suction Vortex: Importance of the Bottom Boundary Layer
(吸い込み渦の構造に関する研究—底面境界層の重要性—)

氏名 雪本 真治

1. はじめに

自然界に見られる竜巻や塵旋風などの強い渦の速度分布は一般には Rankine 渦で近似されることが多い。Rankine 渦というのは、中心付近の渦核部分は角速度一定の剛体回転、渦核の外側は角運動量一定のポテンシャル渦(渦なしの流れ)からなっている渦のことである(Rankine,1882)。ポテンシャル渦の領域は遠方で与えられた角運動量が保存しながら中心へ向かうことによって生ずると考えられている。しかしながら、最近可能になってきたドップラーレーダーによる実際の竜巻の観測結果などによると、渦核の外側は必ずしもポテンシャル渦になってはいない(Wurman and Gill,2000)。竜巻のように強い渦の速度分布がどのような力学で決まっているかはいまだに十分に解明されていない。本研究では竜巻に似た強い渦の構造を明らかにするため、実験室内で定常な吸い込み渦を作り、詳しく観察することにした。続いて、軸対称の数値モデルを用いて室内実験の結果を再現し、強い渦の渦核の外側の構造と力学を解明することを目指した。

2. 室内実験

図 1 に実験装置の概要を示す。実験には半径 20cm の円筒水槽を用い、対称軸を中心に角速度 Ω で回転させた。水槽の側壁の上部からスポンジを通して水槽の回転になじませた水を流量 Q で流入させ、底面中心にあけた直径 2.5cm の穴から流出させることで吸い込み渦を作った。実験は水位を 18cm に保って行った。実験の可変パラメータは水槽の回転角速度 Ω と循環流量 Q である。実験では底面からの高さ 10cm の水平面内の流速分布を PIV (Particle Image Velocimetry)で測定し、鉛直面内の流れは染料で可視化することで観察し

た。

図 2 に定常状態の角運動量の半径分布を示す。赤線が $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ 、 $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$ 、青線が $\Omega = 0.4 \text{ rad/s}$ 、 $Q = 33 \text{ cm}^3/\text{s}$ の場合の結果を表している。回転が遅く流量が多いときには渦核の外側で角運動量一定のポテンシャル渦になっているが、回転が速く流量が少ないときは中心に向かって角運動量が減少する分布になっている。

図 3 にポテンシャル渦が実現していないときの鉛直面内の流れの様子を示す。側壁上部から流入した染料は内部領域には侵入せず、比較的側壁に近い領域で下降した後に底面境界層を通過して中心に向かう様子が見られる。吸い込み穴の付近まで来ると、大部分は穴から直接流出するが、残りは上昇流によって一旦上昇した後に穴から流出することがわかる。

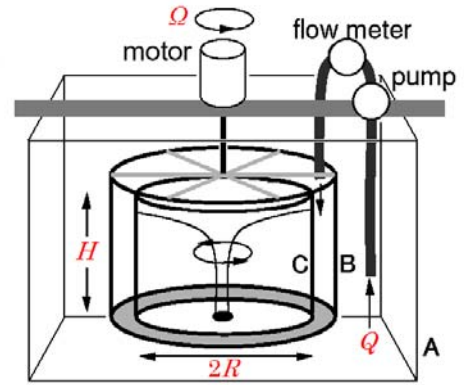


図 1 実験装置の概要

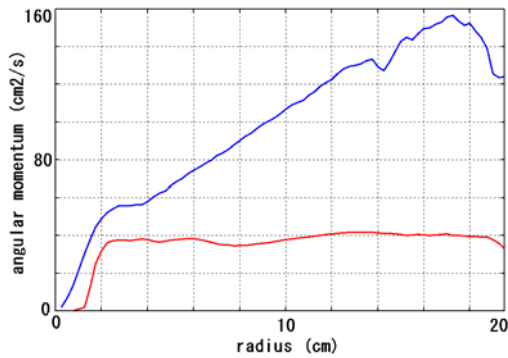


図 3 定常状態の角運動量の半径分布

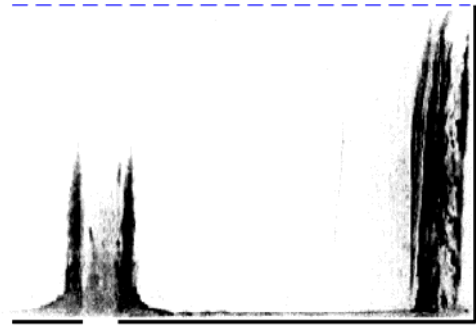


図 2 染料で可視化した鉛直面内の流れの様子

3. 数値モデル

用いた数値モデルは円筒座標系で軸対称を仮定し、水面の変形は無視している。変数は $r-z$ 面内の流線関数 Ψ と角運動量 M の 2 つである。境界条件は中心軸で stress free、上面で free slip であり、側壁と底面は no slip で角速度 Ω の回転を与える。基礎方程式は次の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial t} D^2 \Psi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial D^2 \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial D^2 \Psi}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} D^2 \Psi + \frac{2M}{r^2} \frac{\partial M}{\partial z} + \nu D^4 \Psi \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \nu D^2 M \quad (2)$$

式(1)は渦度方程式、式(2)は角運動量に関する式である。式中の D^2 はこの座標系でのラプラシアンである。

図 4 に室内実験にあわせて計算した場合の $r-z$ 面内の流線と高さ 10cm での角運動量の半径分布を示す。図 4(a),(b) が $\Omega = 0.1 \text{ rad/s}$ 、 $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$ のとき、図 4(c),(d) が $\Omega = 0.4 \text{ rad/s}$ 、 $Q = 33 \text{ cm}^3/\text{s}$ のときの結果である。図 4(b) は図 1 の赤線で示された結果と同様に渦核の外側で角運動量一定のポテンシャル渦が実現している。図 4(d) は図 1 の青線で示された結果

と同様に中心に向かって角運動量が減少する分布になっている。図 4(c)の流線は図 2 に示した鉛直面内の流れの様子をよく再現している。

図 4(a)と図 4(c)を比べるとポテンシャル渦が実現する場合とそうでない場合では流れの様子が大きく異なることがわかる。図 4(a)では底面境界層の上の内部領域にも半径方向の流れが存在し、流入により供給される角運動量が中心付近まで輸送され、渦核の外側全体で角運動量一定の分布が実現している。一方、図 4(c)では、ある半径より内側では全ての流れが底面境界層を通るために、内部領域で半径方向の流れが存在しない領域ができる。その結果ある半径までは内部領域で角運動量が輸送され、角運動量一定の分布を示すが、この半径より内側では内部領域で角運動量をそれ以上内側に輸送することができないため、角運動量が減少する分布になる。

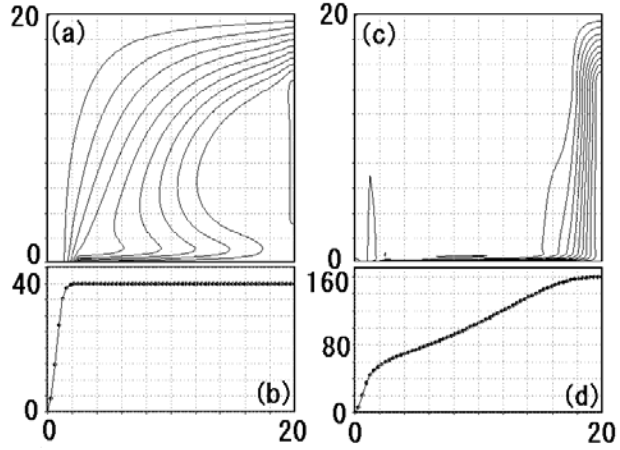


図 4 数値モデルから得られた流線および角運動量の分布

4. 境界層の流れ

数値モデルの結果からポテンシャル渦が実現するかどうかは境界層の存在と大きく関わることが明らかになった。そこでポテンシャル渦の底面に生じる境界層について調べることにした。境界層を支配する無次元化された軸対称な方程式は以下の通りである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv) + u \frac{\partial}{\partial r}(rv) + w \frac{\partial}{\partial z}(rv) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(rv) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0 \quad (5)$$

式(3)の右辺第 1 項は圧力傾度項であり、ポテンシャル渦の流速分布と旋衡風平衡した圧力分布を代入している。また式(3)右辺第 2 項および式(4)右辺は粘性項で、境界層方程式であるため鉛直微分のみを考慮している。これらの式を時間積分し、側壁と底面で角速度 Ω 、内側の境界は open boundary、上部の境界でポテンシャル渦に接続するような定常解を求めた。図 5 に半径方向の境界層輸送量の半径分布を示す。緑で示されたものは境界層方程式から得られた結果、赤で示されたものは第 3 節の数値モデルにおいてポテンシャル渦の底面に生じる境界層での輸送量を無次元化したものである。ただし境界層輸送量 $F(r)$ の無次元化は、

$$F^*(r) = 2\pi R^2 \sqrt{\nu \Omega} F(r) \quad (6)$$

のように行った。 R は水槽半径、 ν は動粘性係数である。図 5 の結果は数値モデルで渦の底面に生じる

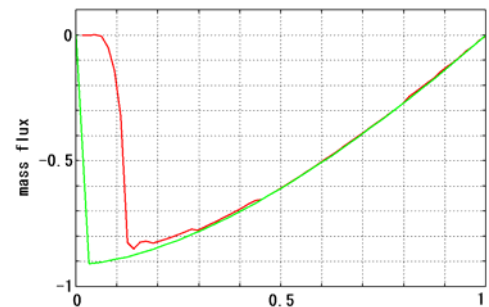


図 5 無次元化された境界層輸送量の半径分布

境界層がポテンシャル渦の底面に生じる回転境界層として理解されることを示している。

内部領域の全体で角運動量一定の分布になるためには、渦核外のあらゆる半径で境界層輸送量よりも吸い込み流量の方が大きく、内部領域で流入が存在する必要がある。図 5 よりポテンシャル渦の境界層輸送量は半径が小さくなるにしたがって単調に増加し、吸い込み穴の半径で最大となる。この境界層輸送量の最大値 F_{\max} と吸い込み流量 Q を比較し、 Q が F_{\max} より大きければポテンシャル渦が実現する。本研究における無次元化された穴の半径は 0.125 であり、この半径での無次元の境界層輸送量は 0.88 である。したがってポテンシャル渦が実現するための条件は、

$$Q > 0.88 \times 2\pi R^2 \sqrt{\nu \Omega} \quad (7)$$

と書ける。この条件に基づいて数値モデルの結果がポテンシャル渦になるか否かを判定した結果を図 6 に示す。図中の+が数値計算を行ったパラメータであり、横に添えられた数字はそのパラメータの定常状態で $r = 4 \text{ cm}$ における角運動量を側壁の角運動量で無次元化した値である。この値が 1.00 であればポテンシャル渦が実現していることを示す。図中で緑の線で示されているのは式(7)で両辺を等しいとおいたときに得られる曲線である。式(7)を満たす領域は緑の線の上側であり、その領域では数値モデルの結果は 1.00 を示している。数値モデルの結果は式(7)のポテンシャル渦実現の判定基準と整合的である。

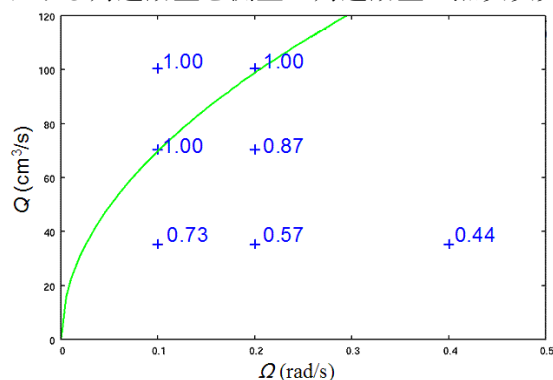


図 6 数値モデルの結果とポテンシャル渦の判定基準

最後にポテンシャル渦にならない場合について考察する。

図 5 を用いて $\Omega = 0.4 \text{ rad/s}$ のときに境界層輸送量が $33 \text{ cm}^3/\text{s}$ になる半径を求めると $r = 17 \text{ (cm)}$ である。したがって $r > 17 \text{ cm}$ では吸い込み流量が境界層輸送量より大きいため内部領域で半径方向の流入が存在し、側壁の角運動量が保存する。しかし $r < 17 \text{ cm}$ では半径方向の流入は全て境界層内で起こり、側壁の角運動量は保存されない。実際に図 4(d)は上の議論と整合的な分布になっている。

5. まとめ

強い渦の渦核の外側の構造と力学を調べるために吸い込み渦の室内実験を行った結果、接線流速分布は渦核の外側でポテンシャル渦になる場合とならない場合の 2 つのレジームがあることがわかった。

軸対称な数値モデルは室内実験の結果をよく再現したので渦の構造を詳しく調べた。その結果、渦の構造と速度分布は底面に生じる境界層に強く支配されていることがわかった。

ポテンシャル渦を仮定した境界層方程式を解いたところ、数値モデルでポテンシャル渦が実現している場合の境界層の構造は、境界層方程式の解とよく一致することがわかった。境界層方程式から求めた境界層輸送量と吸い込み流量を比較することによってポテンシャル渦が実現するか否かの判定基準を求めたところ、この基準が室内実験および数値実験で見られる 2 つのレジームをよく説明することがわかった。