論文の内容の要旨

論文題目 ：
~~A new weak approximation scheme of~~
~~stochastic differential equations~~
~~by using the Runge-Kutta method~~

~~(~~確率微分方程式に対する Runge-Kutta 法を用いた
新たな弱近似手法~~)~~

氏名 ： 二宮 真理子

確率微分方程式の数値計算は, 数理ファイナンス等多くの分野で応用されており, その需要は大きい. 楠岡が紹介した高次の近似手法は実際にいくつかのファイナンスの問題に適用され, 計算速度の高速化という点で極めて優れた結果を出している. 更に Lyons と Victoir はその手法を自由リー環の言葉を用いて記述している.

本論文では定理 0.1 と命題 0.1 により, 楠岡によるこの高次弱近似手法の新たなアルゴリズムの構築に成功した. このアルゴリズムを直感的に説明するとすると, ある与えられた確率微分方程式を近似するような平均を持つ確率変数で, 「常微分方程式-値」確率変数とでも呼べるものを構築する. この確率変数から常微分方程式を一気に引き出すことができるのである. この手法の注目すべき点は, 常微分方程式が決まればあとは常微分方程式に対する Runge-Kutta 法をそのまま適用できることである. この確率変数は定理 0.2 を用いて作り, 定理 0.3 により常微分方程式に対する Runge-Kutta 法を適用して近似した. ここで, 本論文の方法以外にも高次弱近似手法 (本論文では N-V アルゴリズムと呼ぶ) があることを述べておく. N-V アルゴリズムと本論文で紹介するものは共に同じ手法に基づくものであり, 共通した特徴を多く持っているがアルゴリズム自体は全く異なるものであり, その相違の理由に関しては明らかにはなっていない.

Euler-Maruyama 法と新しい手法を数値的に比較するために, 価格過程が Heston モデルに従う元資産に対するアジアンオプションの価格付けの実験を行った. その結果, Romberg 補外法と準 Monte Carlo 法を適用した場合, 新しい手法の計算速度は Euler-Maruyama 法より約 100 倍早かった. 新しい手法に補外法を用いなかった場合でも, Euler-Maruyama 法に Romberg 補外法と準 Monte Carlo を適用した場合よりも約 37 倍速かった.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$B^0(t) = t$, $(B^1(t), \ldots, B^d(t))$ を d 次元ブラウン運動とする．$C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ は, $\mathbb{R}^N$ に定義された $\mathbb{R}^N$-値無限階微分可能関数で, 全ての微分が有界な関数の集合とする．本論文では弱近似, すなわち $(P_t f)(x) = E[f(X(t,x))]$ なるオペレーターの近似を目的とする．但し $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ であり, $X(t,x)$ は Stratonovich 型の積分方程式

$$X(t,x) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X(s,x)) \circ dB^i(s) \tag{0.1}$$

の解とする．ここで $V_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $i = 0, \ldots, d$ である．$V_i \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N\right)$ は以下のようにしてベクトル場とみなされる：$f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ に対し,

$$V_i f(x) = \sum_{j=1}^{N} V_i^j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

$A = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}, d \geq 1$ をアルファベットとし, A^* を A の要素から成る全ての語の集合とする．1 は空語であり A^* の結合演算に関して単位元である．$u = v_{i_1} \cdots v_{i_n} \in A^*$, $i_k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ に対し, $|u| = n$, $\|u\| = |u| + \mathrm{card}\,(\{k \,|\, i_k = 0\})$ を定義する．但し $\mathrm{card}(S)$ は集合 S の元の個数を表す．A_m^* と $A_{\leq m}^*$ はそれぞれ $\{w \in A^* |\, |w| = m\}$, $\{w \in A^* |\, |w| \leq m\}$ であるとする．$\mathbb{R}\langle A \rangle$ を A^* を基底とする $\mathbb{R}$-係数自由代数とし, $\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ を基底 A^* の全ての $\mathbb{R}$-係数形式級数の集合とする．このとき $\mathbb{R}\langle A \rangle$ は $\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ の部分 $\mathbb{R}$-代数となっている．$\mathbb{R}\langle A \rangle$ の元は非可換多項式と呼ばれる．$\mathbb{R}\langle A \rangle_m = \left\{P \in \mathbb{R}\langle A \rangle \,\middle|\, (P, w) = 0,\ \|w\| \neq m \text{ のとき}\right\}$ とする．$P \in \mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ は以下のように書かれる:

$$P = \sum_{w \in A^*} (P, w)\, w \quad \text{または} \quad \sum_{w \in A^*} a_w w.$$

ここで $(P, w) = a_w \in \mathbb{R}$ は w の係数を表している．代数構造は一般的なものと同様に定義する．すなわち

$$\left(\sum_{w \in A^*} a_w w\right)\left(\sum_{w \in A^*} b_w w\right) = \sum_{\substack{w = uv \\ w \in A^*}} a_u b_v w.$$

Lie 括弧積は $x, y \in \mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ に対し $[x, y] = xy - yx$ で定める．また $w = v_{i_1} \cdots v_{i_n} \in A^*$ に対し, $\mathrm{r}(w) = [v_{i_1}, [v_{i_2}, [\ldots, [v_{i_{n-1}}, v_{i_n}] \ldots]]]$ とする．$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(A)$ を $\mathbb{R}\langle A \rangle$ の中の Lie 多項式とし $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}((A))$ を Lie 級数とする．$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, j_m は以下で定義される写像とする:

$$j_m\left(\sum_{w \in A^*} a_w w\right) = \sum_{\|w\| \leq m} a_w w.$$

任意の $P, Q \in \mathbb{R}\langle A \rangle$ に対し, 内積 $\langle P, Q \rangle$ を以下のように定義する:

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{w \in A^*} (P, w)(Q, w).$$

また, $P \in \mathbb{R}\langle A \rangle$ に対し $\|P\|_2 = (\langle P, P \rangle)^{1/2}$ とする．$(P, 1) = 0$ なる $P \in \mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ に対し, $\exp(P)$ は $1 + \sum_{k=1}^\infty P^k/k!$ と定義できる．また $Q \in \mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ が $(Q, 1) = 1$ を満たすとき $\log(Q)$ は $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}(Q-1)^k/k$ と定義できる．このとき以下の関係が成り立つ:

$$\log(\exp(P)) = P, \qquad \exp(\log(Q)) = Q.$$

自然な同一視 $\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle \approx \mathbb{R}^\infty$ によって, $\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ に直積位相が誘導される．そしてこの位相により $\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ は Polish 空間となり, その Borel σ-加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle)$, $\mathbb{R}\langle\langle A \rangle\rangle$-値確率変数, その期待値などの概念を取り入れることができる．

Φ を $\mathbb{R}\langle A\rangle$ と $\mathbb{R}^N$ 上の滑らかな微分可能オペレーターから成る $\mathbb{R}$-代数の間の準同型で,

$$\begin{aligned} &\Phi(1) = \mathrm{Id}, \\ &\Phi(v_{i_1}\cdots v_{i_n}) = V_{i_1}\cdots V_{i_n},\ i_1,\ldots,i_n \in \{0,1,\ldots,d\}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

なるものとする. また, $s \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $\Psi_s : \mathbb{R}\langle\langle A\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ を以下のように定義する: $P_m \in \mathbb{R}\langle A\rangle_m$ に対し

$$\Psi_s\left(\sum_{m=0}^{\infty} P_m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} s^{m/2} P_m.$$

滑らかなベクトル場 V, すなわち $C_b^\infty\left(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N\right)$ の元に対し, $\exp(V)(x)$ を常微分方程式

$$\frac{dz_t}{dt} = V(z_t), \quad z_0 = x$$

の $t = 1$ での解と定める. また, $V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ に対し $\|V\|_{C^n}$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} \|V\| &= \sup_x |V(x)| \\ \left\|V^{(n)}\right\| &= \sup_x \left\{\left|V_{(x)}^{(n)}(U_1,U_2,\ldots,U_n)\right|;\ \|U_i\| = 1, i = 1,\ldots,n\right\} \\ \|V\|_{C^n} &= \sum_{i=0}^{n} \left\|V^{(i)}\right\|. \end{aligned}$$

ここで $V^{(k)}$ は V の k 階全微分を表す. すなわち

$$V_{(x)}^{(n)}(U_1,U_2,\ldots,U_n) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{N}\cdots\sum_{j_n=1}^{N} \frac{\partial^n V_i}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_n}}(x) U_1^{j_1}\cdots U_n^{j_n} e_i$$

である. 但し e_i は N 次元単位ベクトルであり, U_k^j は $U_k \in \mathbb{R}^N$ の j-番目の成分である.

定義 0.1. $C_b^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ から $\{h \mid h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N\}$ への写像 g に対し, 以下を満たす正定数 C_m が存在するとき g は m 次積分手法と呼ばれる: $W \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ に対し

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left|g(W)(x) - \exp(W)(x)\right| \le C_m \|W\|_{C^{m+1}}^{m+1}. \tag{0.3}$$

$\mathcal{IS}(m)$ をすべての m 次積分手法の集合とする.

記法 0.1. $z_1, z_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}((A))$ に対し, $z_2 \,\text{н}\, z_1$ を $\log(\exp(z_2)\exp(z_1))$ と定義すると, $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}((A))$ に対して

$$(z_1 \,\text{н}\, z_2) \,\text{н}\, z_3 = \log(\exp(z_1)\exp(z_2)\exp(z_3)) = z_1 \,\text{н}\, (z_2 \,\text{н}\, z_3)$$

となるので, $z_1,\ldots,z_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}((A))$ に対しては

$$z_1 \,\text{н}\, z_2 \,\text{н} \cdots \text{н}\, z_n = \log(\exp(z_1)\cdots\exp(z_n)) \tag{0.4}$$

が成り立つ.

以下は主要な結果である.

定理 0.1. $m \geq 1, n \geq 2$ とする. $Z_1, \ldots, Z_n$ は $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}((A))$-値確率変数で以下を満たすものとする:

$$Z_i = j_m Z_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{0.5}$$

$$E\left[\left\|j_m Z_i\right\|_2\right] < \infty \quad i = 1, \ldots, n \tag{0.6}$$

$$\text{いかなる } a > 0 \text{ に対しても} \quad E\left[\exp\left(a \sum_{j=1}^{n} \left\|\Phi\left(\Psi_s\left(Z_j\right)\right)\right\|_{C^{m+1}}\right)\right] < \infty. \tag{0.7}$$

このとき, $s \in (0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}\Bigg\| \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \Big| g_1\left(\Phi\left(\Psi_s\left(Z_1\right)\right)\right) \circ \cdots \circ g_n\left(\Phi\left(\Psi_s\left(Z_n\right)\right)\right)(x) & \\ - \exp\left(\Phi\left(\Psi_s\left(j_m\left(Z_n \mathrm{H} \cdots \mathrm{H} Z_1\right)\right)\right)\right)(x)\Big| \Bigg\|_{L^p} &\leq C s^{(m+1)/2}.\end{aligned} \tag{0.8}$$

なる正定数 C が任意の $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{IS}(m)$ に対して存在する. ここで関数 f と g に対し, $f \circ g(x)$ は $f(g(x))$ を表わす.

$i = 1, \ldots, d,\ j = 1, \ldots, n$ に対し, S_j^i はガウス分布に従う $\mathbb{R}$-値確率変数であるとし, c_j と $R_{jj'}, j, j' = 1, \ldots, n,$ は以下のような実数であるとする : $i, i' = 1, \ldots, d$ に対し

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = 1, \quad E\left[S_j^i\right] = 0, \quad E\left[S_j^i S_{j'}^{i'}\right] = R_{jj'} \delta_{ii'}. \tag{0.9}$$

以下では $j = 1, \ldots, n$ に対し $S_j^0 = c_j$ とする.

$Z_1, \ldots Z_n$ は $Z_j = c_j v_0 + \sum_{i=1}^{d} S_j^i v_i$ なる確率変数で以下を満たすものとする :

$$E\left[j_m\left(\exp\left(Z_1\right) \cdots \exp\left(Z_n\right)\right)\right] = j_m\left(\exp\left(v_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} v_i^2\right)\right). \tag{0.10}$$

次の定理によりこのような $Z_1, \ldots Z_n$ が得られる.

定理 0.2. $m = 5$ 且つ $n = 2$ とする. このとき前述の $Z_1, \ldots, Z_n$ は

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{\mp\sqrt{2(2u-1)}}{2}, \quad c_2 = 1 \pm \frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}, \quad R_{11} = u \\ R_{22} = 1 + u \pm \sqrt{2(2u-1)}, \quad R_{12} = -u \mp \frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2} \end{aligned} \tag{0.11}$$

によって構成される. 但し $u \geq 1/2$.

注意 0.1. $m = 7$ の場合は $n = 3$ では (0.9) と (0.10) に対する解は存在しないことが分かっている.

$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,M}$ を $M \times M$ 実行列, $b = {}^t(b_1, \ldots, b_M) \in \mathbb{R}^M$ とする. すべての $t \in T_{\leq m}$ に対して (A, b) が m 次条件と呼ばれるある条件を満たすとする.

このとき m 次 M 段階陽的 Runge-Kutta 法は以下のように書ける：$W \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N\right)$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ に対し，

$$
\begin{aligned}
Y_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} W(Y_j), \\
Y &= y_0 + \sum_{i=1}^{M} b_i W(Y_i).
\end{aligned} \tag{0.12}
$$

このとき次の定理が成り立つ：

定理 0.3. $g(W)(y_0) = Y$ とおく．このとき

$$g \in \mathcal{IS}(m) \tag{0.13}$$

である．

系 0.1. $Z_1,\ldots,Z_n$ を定理 *0.2* によって構成される $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}((A))$-値確率変数とし，線形作用素 $Q_{(s)}$, $s \in (0,1]$ を以下で定義する: $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$, $s \in (0,1]$ に対し

$$\left(Q_{(s)}f\right)(x) = E\left[f\left(g(\Phi\left(\Psi_s\left(Z_1\right)\right)) \circ \cdots \circ g(\Phi\left(\Psi_s\left(Z_n\right)\right))(x)\right)\right] \tag{0.14}$$

但し $g \in \mathcal{IS}(m)$ である．このとき

$$\left\|P_s f - Q_{(s)} f\right\|_\infty \leq C s^{(m+1)/2} \left\|\mathrm{grad}(f)\right\|_\infty \tag{0.15}$$

が成り立つ．ここで C は正定数である．