

## 論文審査の結果の要旨

氏名 二宮 真理子

本論文は、ファイナンスにおけるヨーロッパ型デリバティブ等のデリバティブの価格計算に関連して、拡散過程の平均値の数値計算に関する新しい方法を提案し、その有効性を数学的に厳密に示したものである。

$W(t)$ ,  $t \geq 0$ , を  $d$  次元標準ウィナー過程とし、 $\mathbf{R}^N$  上の拡散型確率微分方程式

$$X(t, x) = x + \sum_{k=1}^d \int_0^t V_k(t, X_\varepsilon(s)) \circ dW^k(s) + \int_0^t V_0(t, X_\varepsilon(s)) ds$$

を考え、 $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  はリプシッツ連続関数とする。この時、 $E[f(X(1, x))]$  を精度よく高速に求めることが特にファイナンスでは求められている。

これについて、これまでよく用いられている方法はオイラー・丸山近似法であり、汎用性の高い方法ではあるが、近似の速さに問題があり、より速い近似法が求められている。オイラー・丸山近似法は1次微分近似の方法であり、高次近似の方法の研究が行われていたが10年ほど前に Kusuoka Scheme というアイデアが現れた。この方法はある条件を満たすものを見つければ、非常によい近似計算ができるということを示したものであり、その後その具体的な実現法として、Ninomiya-Victoir, Fujiwara らの方法が見いだされた。

本論文では、まず  $Z_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,  $j = 1, \dots, J$  が平均ゼロのガウス型確率変数、 $c_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , が定数としたとき、

$$\exp(c_1 V_0 + \sum_{i=1}^d Z_{i,1} V_i) \cdots \exp(c_J V_0 + \sum_{i=1}^d Z_{i,J} V_i)$$

が Kusuoka Scheme の条件を満たすかどうかを

$$\sum_{j=1}^J c_j = 1, \quad E[Z_{ij} Z_{i'j'}] = \delta_{ii'} R_{j,j'}, \quad i, i' = 1, \dots, d, \quad j, j' = 1, \dots, J,$$

の場合に調べた。 $J = 2$  の時は5次近似となるものが存在することを示し、

$$c_1 = \frac{\mp \sqrt{2(2u-1)}}{2}, \quad c_2 = 1 \pm \frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2},$$

$$R_{11} = u, \quad R_{22} = 1 + u \pm \sqrt{2(2u-1)}, \quad R_{12} = -u \mp \frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}.$$

$u \geq 1/2$  の時に限り 5 次近似となることを示した。さらに、 $J \leq 3$  では 7 次近似となるものがないことを示した。このような形で Kusuoka Scheme を実現するというのは全く新しいアイデアである。

また、Runge-Kutta 公式を用いて、 $\exp(c_j V_0 + \sum_{i=1}^d Z_{i,j} V_i)$  を簡単な  $V_i, i = 0, 1, \dots, d$  への代入及び四則演算を行う式に置き換えても Kusuoka Scheme の枠内にあることを示した。例えば、7 次の近似においては 7 次の Runge-Kutta 式を用いて 8 ステップの演算でこの部分を置き換えることができる。Romberg 補外法が成立することは証明されているので、上記のガウス確率変数を用いた 5 次近似と 7 次の Runge-Kutta 式を組み合わせることにより、積分計算の問題の部分を除き、時間区間を  $n$  に切ったとき (すなわち、ステップ数が  $n$  のオーダー) の時、誤差が  $n^{-3}$  のオーダーとなる汎用性のあるアルゴリズムを構成した。

また、積分実行には準乱数法を用いることにより、汎用性のあるプログラムも作り実際に数値実験をヘストンモデルのアジアオプションに対して行い、理論が保証する誤差の漸近的な収束のオーダーが実際の数値計算においても確認している。

また、論文の中では Butcher による Runge-Kutta 法に関する議論を、代数的に整理して、証明を非常に見やすいものにして、Runge-Kutta 法により与えられる関数と、 $\exp(W)(\cdot)$  の誤差の一樣評価を示している。

このように本論文では計算ファイナンスで有効な新しい数値計算法を提唱すると共に、ファイナンスの実務に実際に用いることのできる汎用性の高いアルゴリズムを与えており、単に数学的な観点からだけでなく、より複雑なモデルをヨーロッパ型デリバティブ等の価格計算に使える道を開いたという点でファイナンスの実務の観点からも高く評価できるものである。

よって、論文提出者 二宮 真理子 は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。