論文の内容の要旨

論文題目: Topological Constructions of Homology Classes of Knot Quandles
（結び目カンドルのホモロジー類の位相幾何的構成）

氏名: 木村 康人

絡み目カンドル Q_L は, 絡み目の完全不変量でありながらも, それ自体から絡み目を分類することは非常に困難である. そこで, 絡み目カンドルから, 新たな絡み目不変量を構成する試みが種々なされている. 筆者の研究は, その一つの手法として, 絡み目カンドルのホモロジー理論について考えるものである.

以下に述べるように, 絡み目カンドルの二次のホモロジーは, 絡み目の管状近傍と対応するものであることが示されている. これは, 曲線の埋め込みである絡み目に対して, 充分な情報を保持しているとは言えない. その意味で, 筆者の研究対象である絡み目カンドルの三次ホモロジー群は, 各曲線間の位置関係をも情報として持つものであり, 結び目に関する本質的な情報を保持していることが期待される.

カンドルとは, Joyce [J] により群の共役演算の一般化として導入されたものであり, 任意の絡み目 L に対して, 絡み目カンドル Q_L とよばれる絡み目の完全不変量が対応することが知られている. 一方, 枠付き絡み目に対して, 絡み目ラックとよばれる類似の不変量が定義されており, 枠付き絡み目の完全不変量として知られる.

Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito [CJKLS] は, Fox の絡み目図式の三彩色数は, 一般の有限カンドル X による絡み目図式の彩色数に拡張されるこ

とに注目し, この各彩色図式に重さを与えることを考えた. この重さの抽象化として, 彼らは, 一般のカンドル Q に対する ラック・(コ) ホモロジー群, 退化 (コ) ホモロジー群, カンドル・(コ) ホモロジー群の三種を定義した. このとき, 有限カンドル X の二次のカンドル・コサイクル ϕ を重さ関数とすることで, 重さ付き彩色数として絡み目 L のカンドル・コサイクル不変量 $\Phi_\phi(L)$ を導入した. この不変量は, 計算に不向きな結び目カンドル自体に比べて実用上の計算に向いており, 事実, 絡み目の鏡像不変性や, タングル分解可能性などの判定において, 有効性を示している.

さらに, Carter-Kamada-Saito [CKS] は, 結び目図式の彩色の概念が, 図式のアークにとどまらず領域に拡張できることを示し, このことから, 有限カンドル X の三次のカンドル・コサイクル ϕ を重さ関数とする重さ付き彩色数として, 絡み目 L のシャドウ・コサイクル不変量 $\Phi_\phi(L)$ を定義した.

一方, 絡み目カンドルそれ自体については, Eisermann [E] により, 二次以下のカンドル・ホモロジー群と二次以下のカンドル・コホモロジー群が計算されており, この結果から, カンドル・コサイクル不変量の再構成もなされている.

以上の背景のもと, 著者の目標は以下の三点に分けられる.

(1) 絡み目カンドルの二次のラック・コホモロジー群と二次の退化コホモロジー群を決定すること,

(2) 絡み目カンドルの三次のホモロジー群を決定すること,

(3) ホモロジー理論を通じて影付きカンドル・コサイクル不変量を構成すること.

(1) の目標に関して, Litherland-Nelson [LN] により, 一般にラック・コホモロジー群がカンドル・コホモロジー群と退化コホモロジー群の直和に分解されることが示され, さらに退化コホモロジー群の構造も特定されたので, Eisermann の結果と併せて, 絡み目カンドル Q_L の二次のラック・コホモロジー群の構造も代数的に特定された.

筆者はその上で, 各コホモロジー類に位相幾何的な意味付けを与えることを考えた. Eisermann は Q_L のカンドル・コホモロジー群を特定するにあたって, L の各成分を開いて得られる開絡み目 $\tilde{L}$ の絡み目カンドル $Q_{\tilde{L}}$ が, Q_L の拡大になるという事実を用いている.

筆者は, 結び目を開く操作が結び目のロンジチュードに基点を与えることと同値であることに注目し, 絡み目の枠の概念を拡張してえられる有向多重枠 F を導入し, それらに対応するラック $R_{L,F}$ を定義した. このとき, $R_{L,F}$ が絡み目カンドル Q_L のラック拡大となることから, 結び目カンドルのラック・コホモロジー類の位相幾何的な解釈を与えることに成功した.

主定理 A

絡み目カンドル Q_L の任意の二次のラック・コホモロジー類 $\zeta \in H^2_{\mathrm{R}}(Q_L;\mathbb{Z})$ に対して, L の有向多重枠 F が一意に対応する. また, 逆に L の有効多重枠 F に対して, Q_L の二次のラック・コホモロジー類 ζ が一意に対応する.

次いで, 絡み目カンドルの三次のホモロジー群に関して, 筆者は Carter-Kamada-Saito [CKS] により考察された, 図式によるホモロジー類の実現に注目し, 以下の結果を得た.

主定理 B

成分数 n の絡み目 L の絡み目カンドル Q_L について, 以下が成立する.

(a) 結び目 L の任意の図式 D に対して, シャドウ・ダイアグラム・クラス $[D_x]$ とよばれる三次の非自明なラック・ホモロジー類が存在する.

(b) 三次のカンドル・ホモロジー群には, シャドウ・ファンダメンタル・クラスとよばれる非自明なカンドル・ホモロジー類が丁度 n 個存在する.

主定理 B の証明の要点を以下に述べる.

[CKS] により与えられたホモロジー類の図式による実現と, [E] で示された絡み目カンドル Q_L のカンドル・ホモロジー群の構造から, L の図式 D に対して, ダイアグラム・クラス $[D]$ とよばれる非自明な二次のラック・ホモロジー類の存在が示される. このとき, 図式 D は Q_L により彩色されているとみなすことが可能であるが, 一般に球面 $\mathbb{S}^2$ 上の図式がカンドルにより彩色されているときに, 領域込み彩色可能であることを示して, $[D]$ と $x \in Q_L$ から三次のラック・ホモロジー類 $[D_x]$ を構成した.

さらに, 図式のコボルディズムを実際に構成することにより, 筆者は $[D_x]$ が x の軌道にのみ依存することを示し, Q_L の軌道の数が L の成分数に対応することから (a) を証明した.

この事実のもと, (b) は, ラック・ホモロジー群とカンドル・ホモロジー群との関係を用いて導かれる.

主定理 B (b) で述べたシャドウ・ファンダメンタル・クラスを用いると, シャドウ・コサイクル不変量 $\Phi_\phi(L)$ は次のようにホモロジー理論的に定式化される.

絡み目 $\tilde{L}$ を L と自明結び目の直和とし, $f \in \mathrm{Hom}(Q_{\tilde{L}}, X)$ とする. さらに, $[\tilde{L}_{\mathrm{sh}}]$ を $\tilde{L}$ のシャドウ・ファンダメンタル・クラスの一つとし, X が連結有限カンドルであるとするとき,

$$\Phi_\phi(L) = \sum \langle f_*[\tilde{L}_{\mathrm{sh}}], \phi \rangle$$

が成立する.

これで (3) の目標については解決されたといえる.

最後に (2) の目標に関連した結果について述べる. 筆者は現在のところ, 絡み目カンドルの三次のホモロジー群の決定には至っていないが, そのための一つの足がかりとして, 次の結果を得た.

主定理 C

素な結び目 K に対して, 結び目カンドル Q_K の任意の三次のカンドル・ホモロジー類 ζ はある結び目 L と結び目カンドルの間の準同型 $f\colon Q_L \to Q_K$ とを用いて, $[\zeta] = f_*[L_{\mathrm{sh}}]$ と表すことができる. ここに, $[L_{\mathrm{sh}}]$ は L のシャドウ・ファンダメンタル・クラスである.

[CKS] の結果から, ζ を一般の有向曲面 M 上の領域込み彩色図式として実現することが可能であることが判るが, 筆者の結果は, この曲面としてつねに球面がとれることを意味している.

主定理 C の証明において, 筆者は一般の有向曲面 M 上の領域込み彩色図式 D に対して可能な手術を以下の三つの手順で考察した.

第一に, M 上の本質的閉曲線 C について, $C \cap D$ が円板上の図式の境界として実現できるかどうかについての判別条件を考えた. 円板上の図式の境界として実現可能なものについては, そのことにより, 円板を貼り付けることで, M の種数を落とすことができる.

第二に, $C \cap D$ が円板上の図式の境界として実現できない C について, 筆者は結び目が素であるという条件を課すことで, C 上の図式として可能なものを分類した. このとき, このような本質的曲線を種数と同数だけ選んで, M を円板に切り開くことが可能である. これにより, 円板 M' 上の図式 D' が得られる.

最後に, この図式 D' の境界を二種類の小区間に分割し, ホモロジー類を保存したままこれらの区間をつなぐ手術を考えることで, 最終的に球面上の図式を得ることに成功した.

既に述べたように, 三次のホモロジー類は, 影付き彩色図式として実現されるが, これは図式に現れる辺同士の位置関係を問うことに他ならない. 影を付けていない彩色図式が本質的には, 辺のつながる順序しか問わないことに比べると大きな違いといえる. それ故, 辺の位置関係を問う三次ホモロジー類において, はじめて結び目の本質的な情報が含まれていると期待できる.

主定理 C から, 素な結び目については, 三次のカンドル・ホモロジー群を考察することが, 結び目カンドルの間に存在する準同型の考察に等しいと判る. 筆者は, この事実により, 結び目カンドルの三次ホモロジー群の決定における一つの足がかりが与えられたものと考えている.

参考文献

[CJKLS] Carter, J. S., Jelsovsky, D., Kamada, S., Langford, L., Saito, M., Quandle Cohomology and State-sum Invariants of Knotted Curves and Surfaces, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947-3989.

[CKS] Carter, J. S., Kamada, S., Saito, M., Geometric Interpretations of Quandle Homology, J. K. T. R. **10** (2001), 345-386.

[E] Eisermann, M., Homological Characterization of the Unknot, J. Pure Appl. Alg. **177** (2003), 131-157.

[J] Joyce, D., A Classifying Invariant of Knots, the Knot Quandle, J. Pure Appl. Alg. **23** (1982), 37-65.

[LN] Litherland, R. A., Nelson, S., The Betti Numbers of some Finite Racks, J. Pure Appl. Alg. **178** (2003), 187-202.