論文の内容の要旨

論文題目： Long-range percolation and random walks on the corresponding random graphs

和訳： 長距離パーコレーション及び対応するランダムグラフ上のランダムウォーク

氏名： 三角　淳

本論文では、長距離パーコレーション (long-range percolation) と呼ばれる確率モデルの問題、及び対応するランダムグラフ (random graph) 上のランダムウォーク (random walk) の問題について論じる。なお「長距離パーコレーション」の呼称は必ずしも一般的ではないが、適当な和訳が難しい為ここではこの呼び方を用いる。

長距離パーコレーションとは、与えられた離散的な空間上において、任意の 2 点のペアに対してそれぞれ独立に、与えられた確率で「通行可能な辺 (open bond)」で結ばれるようなモデルを考えて、そのような規則でできるランダムグラフの性質について調べるものである。空間が $\mathbb{Z}^d$ の場合を中心に 1980 年代から研究が進められている。Open bond のできる確率が 2 点間の距離 n に依存し、$p(n) \sim \beta n^{-s}$ $(n \to \infty)$ であるようなケースが最もよく調べられている。ここで $p(n)$ は距離が n 離れた点同士が open bond で結ばれる確率とし、β, s は正のパラメーターである。一方、隣接点の間のみに open bond ができる場合、すなわち $p(n) = 0$ $(n \geq 2)$ の場合が、ボンドパーコレーションと呼ばれる古典的なモデルに対応している。

このような確率モデルに対して、ランダムグラフが無限サイズの連結成分を持つとき、それを無限クラスターと呼ぶ。無限クラスターの存在確率 P_∞ について調べるのが最も基本的な問題であり、$\mathbb{Z}$ 上の長距離パーコレーションにおいては、上記のパラメーター s に対して、$s = 1, 2$ を境に P_∞ に関する相転移の現象が起きる事が知られている。

また、このような規則でできたランダムグラフを 1 つ固定したとき、グラフが局所的に有限であれば、open bond の上を等確率で移動していく単純ランダムウォークと呼ばれる確率過程を考える事ができる。パラメーター s が大きいときは長距離間の open bond の影響が小さく、ランダムウォークの挙動は $\mathbb{Z}^d$ 上における単純ランダムウォークとそれほど差がないと考えられる。また s が小さいときは長距離間の open bond の影響がランダムグラフの構造に本質的な変化をもたらし、ランダムウォークの挙動は何らかの意味で飛躍型確率過程と関係を持つ事が期待されている。

本研究では上記のような問題への考察を通じて、相転移の現象や複雑ネットワークの構造、ランダムな媒質中のランダムな粒子の運動などに関する理解を深める事を目標とした。論文の具体的な構成は次のようになっている。まずPart Iで全体の内容を概観する。Part IIではフラクタルを含む一般的な集合上での長距離パーコレーションの問題について論じる ([4])。Part IIIでは一般のランダムグラフ上での強再帰的なランダムウォークについて論じ、それを $\mathbb{Z}$ 上の長距離パーコレーションから定まるランダムグラフの場合に応用する (熊谷隆氏との共同研究 [3])。Part IVでは $\mathbb{Z}^d$ 上の長距離パーコレーションにおける有効抵抗 (effective resistance) の評価について述べる ([5])。

1. フラクタル上の長距離パーコレーション

$\mathbb{Z}$ 上における結果 (例えば [1],[6] など) を出発点に、より一般的な空間上での長距離パーコレーションの問題を考える。特にカントール集合のようなフラクタル的な構造を持つ空間を念頭に置く。

X を可算無限集合、ρ を $X \times X$ から $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ への写像で「$\rho(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$」かつ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ をみたすものとする。例えば X 上の距離はこの条件をみたす。$p(x,y)$ を $x, y \in X$ の間にopen bondができる確率とし、$\mathbf{p} = \{p(x,y)\}_{x,y \in X, x \neq y}$ が α, $\beta > 0$ に対して次をみたすとする。(ここでは便宜上、記号 α を s の代わりとして用いた。)

$$\lim_{\rho(x,y) \to \infty} \frac{p(x,y)}{\beta \rho(x,y)^{-\alpha}} = 1.$$

また $c_i > 0 (1 \leq i \leq 4)$, $a, b > 1$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、X の部分集合の列 $\{B(x,n)\}_{n=0}^{\infty}$ に対して以下をみたしている事を常に仮定する。

- $x \in B(x,0) \subset B(x,1) \subset B(x,2) \subset \cdots$,
- $\cup_{n=0}^{\infty} B(x,n) = X$,
- $c_1 a^n \leq \sup_{y,z \in B(x,n)} \rho(y,z) \leq c_2 a^n \ (n \geq 0)$,
- $c_3 b^n \leq |B(x,n)| \leq c_4 b^n \ (n \geq 0)$.

但し $|B(x,n)|$ は $B(x,n)$ が含む点の個数を表す。$D = \dfrac{\log b}{\log a}$ とおくとき、適当な仮定の下において D が臨界点になっている事が示される。

2. ランダムウォークの熱核評価

次に、ある一般的な設定下におけるランダムグラフ G 上のランダムウォークについて考える。ここでは考えているグラフが連結な無限グラフで局所的に有限、原点0を含んでいる事などは仮定する。$p_n(x,y)$ をランダムウォークの n ステップ後の推移確率とし、G のスペクトル次元 $d_s(G)$ を $d_s(G) = -2 \lim_{n \to \infty} \log p_{2n}(x,x) / \log n$ で定める。

いま d を与えられた距離とする。この距離に関する中心 x, 半径 R の球を $B(x,R)$ とし、$B(0,R) = B_R$ とおく。B_R に対応する体積 (volume) と呼ばれる量を V_R、また原点と B_R^c の間の有効抵抗と呼ばれる量を $R_{\mathrm{eff}}(0, B_R^c)$ と定める。このとき $1 \leq D, 0 < \alpha \leq 1$ に対して、

$$V_R \approx R^D, \qquad R_{\mathrm{eff}}(0, B_R^c) \approx R^{\alpha}$$

がそれぞれ高い確率で成り立つならば、$d_s = \dfrac{2D}{D + \alpha}$ となる事が分かる。

このような議論は臨界点における無限クラスター上のランダムウォークの研究の流れと密接な関係があり、特に長距離パーコレーションから定まるランダムグラフ上のランダムウォークの場合に上を適用すると、

次のような事が分かる。すなわち、$\mathbb{Z}$ 上の長距離パーコレーションで $p(n) \sim \beta n^{-s}$, $s > 2$, $\beta > 0$, $p(1) = 1$ の場合を考えると、上で $D = \alpha = 1$ の場合に相当し、$d_s(G) = 1$ となる。より詳しく言えば、ガウス型熱核評価 (但し on-diagonal の場合)

$$p_{2n}(x, x) \approx n^{-1/2}$$

が、ランダムグラフを固定するごとの意味と、期待値の意味の双方で成り立つ。ランダムウォークの再帰性、非再帰性に関する先行結果 ([2]) と併せて考えると、上の結果は 1 次元長距離パーコレーションのある種の不連続性を反映したものとなっている。本節の内容は熊谷隆氏との共同研究による。

3. 有効抵抗に関する評価

最後にランダムウォークの問題への更なる応用を意識しつつ、前節の熱核評価の証明において鍵となった体積と有効抵抗の、より詳しい評価について述べる。$\mathbb{Z}^d$ 上の長距離パーコレーションを考え、B_R はユークリッド距離に関する球とする。このとき体積に関しては、適当な仮定の下で s によらず $V_R \approx R^d$ $(R \to \infty)$ となる事が分かる。また有効抵抗に関しては、$d = 1$ のとき

$$R_{\text{eff}}(B_R, B_{2R}^c) \approx \begin{cases} R^{s-2} & 1 < s < 2, \\ R & s > 2, \end{cases}$$

また $d \geq 2$ のとき

$$R_{\text{eff}}(B_R, B_{2R}^c) \approx \begin{cases} R^{s-2d} & d < s < d+2, \\ R^{2-d} & s > d+2, \end{cases}$$

$(R \to \infty)$ となる事が分かる。$d = 1$ のときは $s = 2$ の前後でオーダーが不連続に変化している。また $d \geq 2$, $d < s < d+2$ のときはオーダーが α 安定過程で $\alpha = s - d$ の場合に対応しており、$d = 1$, $1 < s < 2$ の場合も含めて、ランダムウォークと飛躍型確率過程との関係については更なる研究課題となっている。

References

[1] Aizenman, M. and Newman, C. M. (1986). Discontinuity of the percolation density in one dimensional $1/|x-y|^2$ Percolation Models. *Commun. Math. Phys.* **107**, 611–647.

[2] Berger, N. (2002). Transience, recurrence and critical behavior for long-range percolation. *Commun. Math. Phys.* **226**, 531–558.

[3] Kumagai, T. and Misumi, J. (2008). Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media. *Journal of Theoretical Probability.*

[4] Misumi, J. (2006). Critical values in a long-range percolation on spaces like fractals. *Journal of Statistical Physics.* **125**, 877-887.

[5] Misumi, J. (2007). Estimates on the effective resistance in a long-range percolation on $\mathbb{Z}^d$. Preprint.

[6] Newman, C. M. and Schulman, L. S. (1986). One dimensional $1/|j-i|^s$ percolation models: the existence of a transition for $s \leq 2$. *Commun. Math. Phys.* **104**, 547-571.