論文審査の結果の要旨

氏名　三角淳

論文提出者三角淳は，長距離パーコレーションにおける相転移現象，さらにパーコレーションが定める無限クラスター上のランダムウォークの熱核評価について考察を行った。このような研究の背景には，複雑ネットワークの構造やランダム媒質中の粒子の運動など，数理物理の諸問題がある。

パーコレーション（浸透）とは，たとえば吸い取り紙にインクを垂らしてしばらく置いた後にインクが紙全体に広がるかどうかといった問題を論ずるための数学モデルである。空間を離散化して正方格子 $\mathbb{Z}^d$ を考え，隣接点を結ぶボンドが繋がる（インクを通す）確率が p，繋がらない確率が $1-p$ で，それらはボンドが違えば互いに独立とする。p は紙の材質，つまりインクの広がりやすさを表すパラメータである。パーコレーションにおいて論じられる最も基本的な問題は，無限クラスター（無限にインクが広がる領域）ができる確率 $\mathbb{P}_\infty$ が正になるかどうかを調べることである。空間次元が $d \geq 2$ を満たすとき，結果は p の値に大きく依存し，ある臨界確率 p_c が存在して $p > p_c$ なら $\mathbb{P}_\infty > 0$ であるが，一方 $p < p_c$ のときは $\mathbb{P}_\infty = 0$ となることが知られている。この問題はボンドパーコレーションとよばれ，Kesten ら著名な確率論研究者が精力的に研究を行ってきた歴史がある。

ボンドパーコレーションでは，直接繋がるのは隣接点に限られているが，三角は離れた2点間でも繋がる可能性がある場合を考察した。これを長距離パーコレーションという。繋がる確率 $p = p(\rho)$ は，2点間の距離 ρ の関数であり，それは $p \sim \beta\rho^{-s}$ $(\rho \to \infty)$ のように2点が離れるとき減衰する。ここで $\beta, s > 0$ は定数である。s が大きいほど p は急速に0に近づき，したがって長距離パーコレーションの挙動はボンドパーコレーションの挙動に近いと期待される。

三角は，まず論文の第1部で長距離パーコレーションの問題をフラクタル格子上で論じた。フラクタル格子のハウスドルフ次元を D とするとき，ある種の条件の下で，$s > 2D$ であれば無限クラスターができる確率 $\mathbb{P}_\infty$ は $\mathbb{P}_\infty = 1$ であり，$s \leq D$ のときは $\mathbb{P}_\infty = 0$ であることを示した。さらに $D < s \leq 2D$ のときは $\mathbb{P}_\infty = 0$ となるように $p(\rho)$ を選ぶことが可能である。

次に論文の第2部で三角は，1次元の格子 $\mathbb{Z}^1$ において隣接点は必ず繋がるという条件の下で長距離パーコレーションを考え，それによって生じる無限クラスター（無限ランダムグラフ）の上のランダムウォークについて考察した。ここでいうランダムウォークとは，各点においてその点と繋がる点に等確率でジャンプするような離散時刻のマルコフ連鎖のことである。そのような確率過程に対して，$s > 2$ であれば，時刻 $n \to \infty$ とするとき，$x \in \mathbb{Z}^1$ から出発し時刻 n でランダムウォークが x に戻る確率 $p_n(x,x)$ は $p_{2n}(x,x) \sim Cn^{-1/2}$ と振る舞うことを証明した。これは1次元熱核の減衰速度と同じであり，無限ランダムグラフ上のランダムウォークが $\mathbb{Z}^1$ 上の単純ランダムウォークと同等の振る舞いを見せることを示している。言いかえれば，$s > 2$ のときは長距離間で繋がるボンドの影響は殆ど無視できるのである。さらに三角は一般的な設定の下で，ランダムグラフ上のランダムウォークの熱核評価について論じている。

最後に論文の第3部で三角は，上記の熱核評価を導くにあたって基本的なランダムグラフの体積評価および有効抵抗の評価を，高次元の場合も含め導いた。

これらはいずれも重要な結果であり，長距離パーコレーションにおいて新しい視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により，論文提出者三角淳は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。