論文の内容の要旨

eta

Adiabatic limits of η-invariants and the Meyer functions

(エータ不変量の断熱極限とマイヤー関数)

氏名　　飯田修一

1　はじめに

本論文の目的はマイヤー関数の高次元化を η-不変量の断熱極限を用いて構成し，その基本的性質を研究することである．

まず，マイヤー関数の復習から始める．種数 g の向き付けられた曲面を Σ_g とし，その写像類群を $\mathcal{M}_g$ とする．また，$B{:=}S^2 \setminus \cup_{i=1}^{3} D_i$ を球面から開円板を三つ取り除いたものとする．この時 $\pi_1(B)$ は階数 2 の自由群であり，その生成元を表すループを γ_1, γ_2 とする．任意の $A, B \in \mathcal{M}_g$ に対して B 上の Σ_g-束 $\pi : X(A,B) \to B$ で γ_1, γ_2 に沿ったモノドロミーが A, B になるものが存在する．ここで，$X(A,B)$ は向き付けられたコンパクトな境界付き 4 次元多様体である．写像 $\tau_g : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \to \mathbb{Z}$ を $\tau_g(A,B) := \mathrm{Sign}(X(A,B))$ で定めると，τ_g は 2-コサイクルにを定める．ここで，向き付けられたコンパクトな境界付き $4k$-次元多様体 M に対して，符号数 $\mathrm{Sign}(M)$ は対称双線形形式

$$I : H^{2k}(M, \partial M, \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M, \partial M, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

の符号数として定義される．コサイクル τ_g は符号数コサイクルもしくはマイヤー・コサイクルと呼ばれ，コホモロジー類 $[\tau_g] \in H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z})$ が定まる．種数 1 の場合，$\mathcal{M}_1 = SL_2\mathbb{Z}$, $3[\tau_1] = 0 \in H^2(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ であることから，関数 $\phi_1 : SL_2(\mathbb{Z}) \to \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ で任意の $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $\tau_1(A,B) = -\phi_1(A) - \phi_1(B) + \phi_1(AB)$ を満たすものが唯一存在し，種数 1 のマイヤー関数と呼ばれる．マイヤー関数 ϕ_1 は以下のような性質を持つ．

定理 1.1 (マイヤー [9]). 任意のコンパクト有向曲面 B 上の Σ_1-束 X に対して, 境界 $\partial B = \cup_{i=1}^{k} S_i$ に沿ったモノドロミーを $A_1, \cdots A_k \in SL_2(\mathbb{Z})$ とすると,

$$\mathrm{Sign}(X) = -\Sigma_{i=1}^{k} \phi_1(A_i).$$

種数 2 においても $5[\tau_2] = 0 \in H^2(\mathcal{M}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $H^1(\mathcal{M}_2, \mathbb{Z}) = 0$ より種数 2 のマイヤー関数 $\phi_2 : \mathcal{M}_2 \to \frac{1}{5}$ が一意的に存在し, 同様の性質を満たす. 種数 $g > 2$ では符号数コサイクルは捩じれ元ではないためマイヤー関数は定義できない. ただし, $\mathcal{H}_g < \mathcal{M}_g$ を超楕円的写像類群とすると, $g > 2$ において τ_g の $\mathcal{H}_g$ での位数は $2g+1$ である (cf. [6],[10]). よって種数 g のマイヤー関数 $\phi_g : \mathcal{H}_g \to \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z}$ が定義される.

本論文では, 種数 2 の曲線の自然な高次元化としてテータ因子を考察し, マイヤー関数の高次元化を以下のようにして行う.

2 主結果

次数 g のジーゲル上半空間を $\mathfrak{S}_g$, ジーゲルモジュラー群を $\Gamma_g := Sp(2g, \mathbb{Z})$ とする. 主偏極アーベル多様体の普遍族 $f : \mathbb{A}_g \to \mathfrak{S}_g \curvearrowleft \Gamma_g$ は同変に作用し, 商空間 $\mathcal{A}_g := \Gamma_g \setminus \mathfrak{S}_g$ は主偏極アーベル多様体のモジュライ空間である. テータ因子の普遍族を $f : \Theta := \{(z, \tau) \in \mathbb{A}_g : \theta(z, \tau) = 0\} \to \mathfrak{S}_g$ とする. ここで, $\theta(z, \tau)$ はリーマンテータ関数である. この時 Γ_g の $\mathbb{A}_g$ への作用は Θ を保たないが, 定義を少し変更することで Γ_g は $f : \Theta \to \mathfrak{S}_g$ へ同変に作用する. さらに, この作用に関して Γ_g-不変な接続 (接束の垂直成分と水平成分への分解のこと) $T\Theta \cong T\Theta/\mathfrak{S}_g \oplus T_H\Theta$ と Γ_g-不変なケーラー計量 g^{Θ} が入る. テータ因子が特異になる軌跡を $\widetilde{N_g} := \{\tau \in \mathfrak{S}_g : \mathrm{Sing}(\Theta_\tau) \neq \emptyset\}$ とし, $\mathcal{N}_g := \Gamma_g \setminus \widetilde{N_g}$ とおく. $\mathcal{N}_g$ はある重さ $\frac{(g+3)\cdot g!}{2}$ のジーゲル保型形式 $\Delta_g(\tau)$ の零因子になることが知られており, $\mathcal{N}_g$ は $\mathcal{A}_g$ の因子である. $\mathcal{A}_g \setminus \mathcal{N}_g$ にはオービフォールドの構造が自然に入り, 非特異テータ因子のモジュライ空間とみなせる. 以下の群, すなわち $\mathcal{A}_g \setminus N_g$ のオービフォールド基本群が本論文の主題である:

$$\mathcal{S}_g := \pi_1^{orb}(\mathcal{A}_g \setminus N_g).$$

注 2.1. オービフォールド $\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{N}_1 = \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{N}_2$ はそれぞれ種数 1 及び種数 2 のリーマン面のモジュライ空間である. よって $\mathcal{S}_1 = \mathcal{M}_1$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{M}_2$ である. このことより, 群 $\mathcal{S}_g$ を写像類群のある種の高次元化とみなす.

写像類群 $\mathcal{M}_g$ の場合と同様にパンツ上のテータ因子の族の符号数を用いることで符号数コサイクル $[c_g] \in H^2(\mathcal{S}_g, \mathbb{Z})$ が定義される. 特に $c_2 = \tau_2$ である. また, g が奇数の時は次元に関する理由から, $c_g \equiv 0$ である. よって, g が偶数の場合のみを考える. 以下, c_g が捩れ元であることを, 関数 $\Phi_g : S_g \to \mathbb{R}$ で任意の $A, B \in \mathcal{S}_g$ に対して $c_g(A, B) = -\Phi_g(A) - \Phi_g(B) + \Phi_g(AB)$ を満たす関数, すなわちマイヤー関数の高次元化を構成することによって示す.

まず η-不変量の復習から始める. (M, g) を $(4k-1)$-次元の有向閉リーマン多様体とする. 符号数作用素 $D : \oplus A^{2p}(M) \to \oplus A^{2p}(M)$ を

$$D(\omega) = (-1)^{k+p+1}(*d - d*)\omega, \quad \omega \in A^{2p}(M)$$

で定義し, $\sigma(D)$ を D のスペクトラムとする. リーマン多様体 M の η-関数を

$$\eta(s) := \sum_{\lambda \in \sigma(D) \setminus 0} \frac{\mathrm{sign}\lambda}{|\lambda|^s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

で定めると, $\eta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で広義一様収束し, $\mathbb{C}$ 全体に一価有理型関数として解析接続され, $s = 0$ で正則である [2], [4]. $\eta(M, g) := \eta(0)$ はリーマン多様体の η-不変量と呼ばれる. 次に M がファイバー束 $\pi : M \to B$ の構造を持っている場合を考える. 接続 $TM \cong TM/B \oplus TB$ 及び相対接束 TM/B と底空間の計量 $g^{M/B}, g^B$ が与えられ, M の計量が $g^M = g^{M/B} \oplus \pi^* g^B$ と直交分解していたとする. M 上の計量の 1-パラメーター族 $g^{M,\varepsilon}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を

$$g^{M,\varepsilon} := g^{M/B} \oplus \varepsilon^{-1} \pi^* g^B$$

で定めると, $\eta(M, g^{M,\varepsilon})$ は $\varepsilon \to 0$ で収束し [3], η-不変量の断熱極限と呼ばる. 極限を $\eta^0(M, g)$ と書くことにする.

以下のようにしてマイヤー関数 Φ_g を構成する. 任意の $[\sigma] \in \mathcal{S}_g$ に対して代表元 $\sigma : S^1 \to \mathcal{A}_g \setminus \mathcal{N}_g$ を選ぶ. ここで σ はオービフォールドの意味での写像である. この時ファイバー積 $M_\sigma := \Theta \times_\sigma S^1$ は写像トーラスと呼ばれ, S^1 上の非特異テータ因子の可微分族である. 写像 σ から誘導される M_σ 上の接続および相対接束上の計量 g^{M_σ/S^1} を用いて M_σ 上の計量を $g^{M_\sigma,\varepsilon} := g^{M_\sigma/S^1} \oplus \varepsilon^{-1} \pi^* dt^2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ と定める.

定義 2.1 (マイヤー関数の高次元化)**.** 関数 Φ_g を以下で定義する.

$$\Phi_g(\sigma) := \eta^0(M_\sigma) + \frac{(-1)^{g/2} 2^{g+3} (2^{g+2} - 1)}{(g+3)!} B_{\frac{g}{2}+1} \int_{S^1} \sigma^* d^c \log \|\Delta_g(\tau)\|^2.$$

ここで, $d^c = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})$, $\|\Delta_g(\tau)\|^2 := (\det \mathrm{Im}\tau)^{\frac{(g+3)\cdot(g)!}{2}} |\Delta_g(\tau)|^2$ であり B_k はベルヌーイ数である. ただし, この定義の段階では $[\sigma]$ の同値類における代表元のとり方の不確定性から, well-defined であることは明らかではない. 以下が主定理である.

定理 2.2. (1) もし $[\sigma_1] = [\sigma_2] \in \mathcal{S}_g$ であれば $\Phi_g(\sigma_1) = \Phi_g(\sigma_2)$. よって関数 $\Phi_g : \mathcal{S}_g \to \mathbb{R}$ が *well-defined* に定まる.
(2) 任意の $A, B \in \mathcal{S}_g$ に対して

$$c_g(A, B) = -\Phi_g(A) - \Phi_g(B) + \Phi_g(AB).$$

特に $[c_g] \otimes \mathbb{Q} = 0 \in H^2(\mathcal{S}_g, \mathbb{Z})$.

種数 2 のマイヤー関数の一意性より $\Phi_2 = \phi_2$ である. また, 種数 2 の時, Δ_2 は井草保型形式 χ_2 と定数倍を除いて一致するので, 以下のようなマイヤー関数 ϕ_2 の解析的な表示を得る.

系 2.3. 任意の $\sigma \in \mathcal{M}_2$ に対して以下が成立する.

$$\phi_2(\sigma) = \eta^0(M_\sigma) - \frac{2}{15} \int_{S^1} \sigma^* \|\chi_2(\tau)\|^2.$$

次にマイヤー関数の一意性について考察する．マイヤー関数 ϕ_g の存在は，$H^1(SL_2(\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = H^1(\mathcal{M}_2,\mathbb{Z}) = H^1(\mathcal{H}_g,\mathbb{Z}) = 0$ であることから一意的であった．しかしながら，$\mathcal{S}_g$ では以下のように状況が異なる．

定理 2.4. 以下が成立する．

$$H^1(\mathcal{S}_g,\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad 0\le g\le 3, \\ \mathbb{Z} & \textit{if} \quad g\ge 4. \end{cases}$$

よって一般の g に対して，コサイクル c_g を境界とする関数 Φ_g は一意的でないことが分かる．次に，Φ_g の値を計算する．まず $\mathfrak{S}_g^\circ := \mathfrak{S}_g \setminus \widetilde{\mathcal{N}_g}$ おくと，完全列

$$1 \to \pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ) \to \mathcal{S}_g \to \Gamma_g \to 1$$

が成立し，群 $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$ はトレリ群の一般化とみなせる． また，[5] によると $\mathcal{N}_g$ は二つの既約成分 $\theta_{null,g}, \mathcal{J}_g$ を持つ．この既約成分に応じて二種類の $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$ の元の系列 $\{\Pi_\lambda^1\}_\lambda, \{\Pi_\mu^2\}_\mu$ が定まり，集合 $\{\Pi_\lambda^1, \Pi_\mu^2\}_{\lambda,\mu}$ は $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$ を生成する．

定理 2.5. 以下が成立する．

$$\begin{aligned} \Phi_g(\Pi_\lambda^1) &= \begin{cases} -\frac{4}{5} & \textit{if} \quad g=2, \\ (-1)^{\frac{g}{2}+1}\frac{(g+1)2^{g+2}(2^{g+2}-1)}{(g+3)!}B_{\frac{g}{2}+1} & \textit{if} \quad g\ge 3. \end{cases} \\ \Phi_g(\Pi_\mu^2) &= (-1)^{\frac{g}{2}+1}\frac{(g+1)2^{g+3}(2^{g+2}-1)}{(g+3)!}B_{\frac{g}{2}+1} \qquad \textit{if} \quad g\ge 4. \end{aligned}$$

特に，関数 Φ_g は非自明であることが分かる．また，$g=2$ の場合，Π_λ^1 は種数 2 のリーマン面上の単純分離曲線に沿ったデーン捻りであり，$\Phi_2(\Pi_\lambda^1) = \phi_2(\Pi_\lambda^1) = -\frac{4}{5}$ である．この結果は [8] の結果と整合する．

謝辞

本論文における研究を進めるにあたって，古田幹夫教官，河澄響矢教官及び寺杣友秀教官からは多くの有益な助言を頂きました．ここに感謝の意を表します．指導教官である吉川謙一教官からは修士課程・博士課程を通じてたゆまぬご指導を承り，数知れない助言・激励を頂きました．また，論文作成に当たっては筆者の拙い英語を辛抱強く添削してくださいました．ここに特別な感謝の意を表したいと思います．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, *Logarithm of the Dedekind η-Funktion,* Math. Ann. 278 (1987) 335-380

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975) 43-69

[3] J.-M. Bismut, J. Cheeger, *η-invariants and their adiabatic limits*, J. Am. Math. Soc. 2 (1989) 33-70

[4] J.-M. Bismut, D. S. Freed, *The analysis of elliptic families II: Dirac operators, eta invariants, and the holonomy theorem of Witten*, Comm. Math. Phys. 107 (1986) 103-163

[5] O. Debarre, *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **25** (1992) 687-708

[6] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibration*, Math. Ann. 316 (2000) 237-257

[7] S. Iida, *Adiabatic limits of η-invariants and the Meyer function of genus two*, master's thesis, the university of Tokyo (2005)

[8] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibration of genus two - a topological approach -*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüler Spaces held in Finland, ed. S. Kojima et al., World Scientific Publ., (1996) 123-148

[9] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. 201 (1973) 239-264

[10] T. Morifuji, *On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups*, J. Math. Soc. Japan. 55 (2003) 117-129

[11] K. Yoshikawa, *Discriminant of Theta divisors and Quillen metrics*, J. Diff. Geom. 52 (1999) 73-115