論文の内容の要旨

Schrödinger equations on scattering manifolds and microlocal singularities
(散乱多様体上のSchrödinger方程式と超局所的特異性)

伊 藤 健 一

本論文の内容は一部を除いて中村周教授（東京大学）との共同研究に基づいている.

目的は多様体上での Schrödinger 方程式の解の特異性について論じることである.

散乱多様体上の Schrödinger 作用素

散乱多様体とは Melrose（1994）により導入された非コンパクト多様体の一クラスであり，散乱理論を多様体上で展開する際に有効とされている．Riemann 多様体 (M, g^{sc}) が散乱多様体であるとは次で定義される：

1. 多様体 M に対して分解 $M = M_0 \cup M_\infty$; $M_0 \Subset M$, $M_\infty \cong (0,\infty) \times \partial M$ が存在する．ただし ∂M はある閉多様体とする.（無限遠方における M の位相的境界に対応する.）
2. M_∞ の遠方（$r \to \infty$, $(r,\theta) \in (0,\infty) \times \partial M$）で計量 g^{sc} が錘型計量 $g^{\mathrm{cn}} = dr^2 + r^2 g^{\partial}_{jk} d\theta^j d\theta^k$ に近づく．ここで g^{∂} は ∂M 上の Riemann 計量である.

$\mathbb{R}^n$ における極座標の拡張であることに注意する：$\mathbb{R}^n = \{|x| < 1\} \cup ((0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1})$．このとき M の無限遠方が漸近的 Euclid 空間の構造を持つものと解釈される．我々はこの散乱多様体上で Laplace-Beltrami 作用素を用いた Schrödinger 作用素 $H = -\triangle_{\mathrm{sc}} + V$ を考える．ただしポテンシャル V は滑ら

かであり，遠方では ν (<2) 次多項式以下の増大度をもつとする．

超局所的平滑化作用

以上の条件の下で時間推進作用素 e^{-itH} の特異性を調べる．波動関数の波面集合は，古典的には，運動量無限大の成分に対応する．一方，e^{-itH} の波動関数への作用は，相空間で見た場合，対応する古典系の時間発展となる．(誤差を含む.) 従って，波動関数の特異性の解析は，古典系における運動量無限大の粒子の運動の解析に対応する．(cf. 伝播速度無限大) この視点に依れば，初期状態における波面集合型の特異性は非零時間では遠方での波動関数の増大に移される．そして，また，この逆も成立するため，時間推進作用素による平滑化作用が期待される．

自由な Hamiltonian $K=\sum_{j,k} g_{\mathrm{sc}}^{jk}\xi_j\xi_k$ に対する Hamilton 方程式の解を $(x(t),\xi(t))=\exp tH_K(x_0,\xi^0)$ とする．$t\to\pm\infty$ で軌道が有界領域に留まるとき (x_0,ξ^0) は捕捉的であると言い，そのような点の集合を $\mathcal{T}_\pm$ とする．計算により，初期データが $T^*M\setminus\mathcal{T}_\pm$ に属するなら，極限 $(\rho^\pm,\theta_\pm,\omega^\pm)=\lim_{t\to\pm\infty}(\rho(t),\theta(t),\omega(t))$ が存在することが分かる．ただしは $(r,\theta)\in M_\infty$ から誘導される $T^*M_\infty=T^*(0,\infty)\times T^*\partial M$ の局所座標を (r,ρ,θ,ω) とする．

定義 (斉次波面集合) 超関数 $u\in\mathcal{S}'(M)$ と $(r_0,\rho^0,\theta_0,\omega^0)\in T^*M_\infty$ に対し，

$$(r_0,\rho^0,\theta_0,\omega^0)\notin \mathrm{WF}_{\mathrm{hg}}(u)$$

$$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\ \exists a\in C_0^\infty(T^*M_\infty)\ \text{s.t.}\begin{cases} a(r_0,\rho^0,\theta_0,\omega^0)\neq 0,\\ \|a^{\mathrm{w}}(hr,hD_r,\theta,h^2D_\theta)u\|=O(h^\infty),\ h\downarrow 0.\end{cases}$$

定理 1 $\nu<2$ とする．このとき $(x_0,\xi^0)\in T^*M\setminus\mathcal{T}_\mp$ と $\pm t_0>0$ に対して，

$$(-2t_0\rho^\mp(x_0,\xi^0),\rho^\mp(x_0,\xi^0),\theta_\mp(x_0,\xi^0),\omega^\mp(x_0,\xi^0))\notin \mathrm{WF}_{\mathrm{hg}}(u),$$
$$\Rightarrow \mathrm{WF}(e^{-it_0H}u)\cap\{\exp\tau H_K(x_0,\xi^0);\ \tau\in\mathbb{R}\}=\varnothing.$$

古典系では $\nu<2$ のとき運動量無限大でポテンシャルの影響が無視されることに注意する．これは中村教授 (2005) の Euclid 空間における結果の多様体上への拡張である．非零時間における波動関数の位置 - 運動量の各成分は，初期状態のそれを陪特性曲線に沿って伝播させたものとなっていおり，運動量無限大の成分は，無限遠方からも伝播速度無限大で伝わってくる．従って初期データ u がある超局所的方向に強い減衰を持っていれば，瞬間以降/以前にその方向から来る情報を集めてもそれは大きくはならない，よって波面集合となって現れない，ということを意味している．

この方面では Craig-Kappeler-Strauss (1995) の超局所平滑化作用 (以下，CKS) が知られているが，**定理 1** は CKS の仮定における減衰方向を超局所解析的な意味で局所化した結果，結論も時間に関して局所化されることを意味しており，CKS の精密化になっている．

Wunsch (1999) は Euclid 空間 $(\mathbb{R}^n,dz^2)$ 上での自由時間推進作用素の積分表示において積分核に二次振動が現れることに着目した．散乱多様体上で

は無限遠での構造が一様に規定されているため，関数 u の遠方における一次振動 $e^{\pm\lambda r}$ を定量することができ，散乱波面集合 $\mathrm{WF}_{\mathrm{sc}}(u)$ として捉えることが出来る (Melrose, 1994). Wunsch は，同様にして，二次振動を捉える方法として，二次散乱波面集合 $\mathrm{WF}_{\mathrm{qsc}}(u)$ $(\subset T^*M_\infty)$ を導入し，その伝播を完全に調べた.

ところが，次の定理により二次散乱波面集合は斉次波面集合と同値であることが示される.

定理 2 任意の超関数 $u \in \mathcal{S}'(M)$ に対して,

$$\mathrm{WF}_{\mathrm{hg}}(u) = \{(r,\rho,\theta,\omega) \in T^*M_\infty;\ (r,2\rho,\theta,\omega) \in \mathrm{WF}_{\mathrm{qsc}}(u)\}.$$

Wunsch は無限遠で減少するポテンシャルを扱ったが，斉次波面集合の方法を用いると，ポテンシャルの増大度に関する仮定は $\nu < 2$ (subquadratic) にまで弱めることができる．2 次以上の増大を持つポテンシャルに対しては異なる性質の伝播が既に知られているため，**定理 2** に注意すると，**定理 1** は Wunsch の結果の一部を最良のポテンシャルにまで拡張したものになっていることが分かる.

時間推進作用素の特異性の特徴付け

ポテンシャルにより強い仮定 $\nu < 1$ を与えると散乱理論の方法を用いることで，**定理 1** を更に精密化することが出来る．散乱理論を適用するためには適当な比較系を設定する必要があるが，我々は多様体 $M_{\mathrm{fr}} = \mathbb{R} \times \partial M$ 上の作用素 $H_{\mathrm{fr}} = -\partial_r^2$ を用いる．計算により古典的逆散乱作用素が存在することが分かる：

$$\exists w_\pm^* = \lim_{t\to\pm\infty} \exp(-tH_{K_{\mathrm{fr}}}) \circ J_{\mathrm{cl}}^* \circ \exp tH_K \colon T^*M \setminus \mathcal{T}_\pm \to T^*M_{\mathrm{fr}} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{fr},\pm}.$$

ただし $K_{\mathrm{fr}}(r,\rho,\theta,\omega) = \rho^2$ を T^*M_{fr} 上の自由な Hamiltonian, $J_{\mathrm{cl}}^* \colon M_\infty \xrightarrow{\cong} (0,\infty)\times\partial M \subset M_{\mathrm{fr}}$ は自然な同一視とする．また $\mathcal{T}_{\mathrm{fr},\pm} = \{\pm\rho \le 0\}$ とする. $w_\pm^*$ は時間 $\pm\infty$ における古典散乱データである.

定理 3 $\nu < 1$ とする．$\pm t_0 > 0$ に対して

$$\mathrm{WF}(e^{-it_0H}Je^{it_0H_{\mathrm{fr}}}u) \setminus \mathcal{T}_\mp = (w_\mp^*)^{-1}[\mathrm{WF}(u) \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{fr},\mp}].$$

更に $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T}_- = 0$（零切断）のとき $e^{-it_0H}Je^{it_0H_{\mathrm{fr}}}$ $(\pm t_0 > 0)$ は次数 0 の Fourier 積分作用素であり，付随する正準関係は

$$\mathcal{C}_\mp = \{(x,\xi,w_\mp^*(x,\xi)) \in (T^*M\setminus 0)\times(T^*M_{\mathrm{fr}}\setminus 0)\}$$

である.

系 $(x_0,\xi^0) \in T^*M \setminus \mathcal{T}_\mp$, $\pm t_0 > 0$ とする．このとき

$$(x_0,\xi^0) \in \mathrm{WF}(e^{-it_0H}u) \iff w_\mp^*(x_0,\xi^0) \in \mathrm{WF}(e^{-it_0H_{\mathrm{fr}}}J^*u). \qquad (1)$$

(1) の右辺は u から簡単に求めることが出来ることに注意する．実際，一次元の自由時間推進作用素 $e^{-itH_{\mathrm{fr}}}$ は具体的に書くことができ，更に前述の相空間での古典軌道 $(r,\rho)\mapsto(r+2t\rho,\rho)$ との対応関係も剰余項無しで exact に書き下せるからである．

中村教授（2003）は漸近的 Euclid 空間において既に**定理 3** の前半部分と同様の結果を得ているが，比較系が異なるため，単純な拡張-制限の関係にはない．また**定理 3** は Hassell-Wunsch（2005）による先行結果にも類似しているが，我々のアイデアおよび手法はより自然で簡潔である．

波動作用素の特異性

J を $(0,\infty)\times\partial M\supset M_{\mathrm{fr}}$ から M_∞ への滑らかな cutoff と自然な同一視の合成とする．$\nu<-1$ のとき波動作用素 $HJ-JH_{\mathrm{fr}}$ は H_{fr} に対して相対コンパクトではないが，波動作用素 $W_\pm=\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}e^{itH}Je^{-itH_{\mathrm{fr}}}$ が存在し，完全性が成り立つ．

定理 4 $\nu<-1$ とすると

$$\mathrm{WF}(W_\mp u)\setminus\mathcal{T}_\mp=(w_\mp^*)^{-1}[\mathrm{WF}(u)\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{fr},\mp}].$$

更に $\mathcal{T}_+=\mathcal{T}_-=0$ を仮定すると，$W_\mp$ は次数 0 の Fourier 積分作用素であり，付随する正準関係は

$$\mathcal{C}_\mp=\{(x,\xi,w_\mp^*(x,\xi))\in(T^*M\setminus 0)\times(T^*M_{\mathrm{fr}}\setminus 0)\}.$$

である．

同様の手法を用いることで散乱作用素 $S=W_+^*W_-$ の Fourier 変換 $\hat{S}=\mathcal{F}_{\mathrm{r}}\circ S\circ\mathcal{F}_{\mathrm{r}}^*$ に対しても以下の結論が得られる．

$$\mathcal{U}_{\mathrm{fr},\pm}=\{(r,\rho,\theta,\omega)\in T^*M_{\mathrm{fr}};\ \pm\rho>0,\ \omega\neq 0\}.$$

とすると，古典的散乱作用素は

$$S_{\mathrm{cn}}^{\mathrm{cl}}\colon\mathcal{U}_{\mathrm{fr},-}\to\mathcal{U}_{\mathrm{fr},+},\quad S_{\mathrm{cn}}^{\mathrm{cl}}(r,\rho,\theta,\omega)=(-r,-\rho,\exp\pi H_{\sqrt{K_\partial}}(\theta,\omega))$$

で与えられる．ここで $K_\partial(\theta,\omega)=\sum_{jk}g_\partial^{jk}(\theta)\omega_j\omega_k$ は ∂M 上の自由な Hamiltonian である．

定理 5 $\nu<-1$ とする．このとき原点近くで 1 をとる関数 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して，$\hat{S}\circ[1-\chi(\langle r\rangle^{-1}|D_\theta|)]$ は 0 次の Fourier 積分作用素で付随する正準関係は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}=\{&(\rho,r,\theta,\omega;\rho',r',\theta',\omega')\in(T^*\hat{M}_{\mathrm{fr},+}\setminus 0)\times(T^*\hat{M}_{\mathrm{fr},-}\setminus 0);\\&(\rho,r,\theta,\omega)=(-\rho',-r',\exp\pi H_{\sqrt{K_\partial}}(\theta',\omega'))\}\end{aligned}$$

である．

Melrose-Zworski（1996）は散乱行列が 0 次 Fourier 積分作用素で，あることを示したが，これはその一表現と考えることが出来る．