論文の内容の要旨

論文題目: Cauchy problems for some Schrödinger equations and wave equations

(あるシュレーディンガー方程式及び波動方程式に対するコーシー問題)

氏名：王　言金（オウ　ゲン　キン）(Wang Yan Jin)

本論文では, 非線形シュレーディンガー方程式と非線形波動方程式に関するコーシー問題を考察し, さらにHarmonicポテンシャルを持ったHartree 方程式に対して定在波の不安定性を考える.

非線形シュレーディンガー方程式

$$iu_t(t,x) + \Delta u(t,x) + |u|^{p-1}u(t,x) = 0, \mathrm{for}(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

を考える. この方程式は屈折率が波の振幅に関し変化する媒体におけるレーザー光線の伝播などの非線形の波動の記述における様々な物理的な現象を記述する. 以上の方程式に対してコーシー問題においては周知のとおり, $1 < p < 1 + 4/n$ のとき大域解が存在する. しかし $1 + 4/n \leq p$ の時負の初期エネルギーを持った方程式の解は時間について大域的に存在しないことがある. 本論文ではまず次の二つのシュレーディンガー方程式を考える.

- 空間二次元の時 inhomogeneous 非線形の項をもつシュレーディンガー方程式:

$$\begin{cases} iu_t(t,x) + \Delta u(t,x) + V(x)|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

  ここに u は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ に関する複素数値の未知関数を表し, $V(x)$ はある条件を満たす実数値関数である.

- Harmonic ポテンシャルを持つ Hartree 方程式：

$$\begin{cases} iu_t(t,x) + \Delta u(t,x) - |x|^2 u(t,x) + (V * |u|^2)u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

  ここに u は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ に関する複素数値の未知関数を表し, $0 < \lambda < n$ のとき

$$V * |u|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(t,y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \tag{3}$$

  という意味である. 空間三次元及び $\lambda = 1$ のとき以上の方程式は Schrödinger-Poisson system と同等である.

第二に, 本論文では波動方程式

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(u)$$

を考える. ここに u は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の実数値の未知関数を表し, $f(u)$ はある非線形の項である. この方程式は音波, 光波, 水の波など様々な波動の伝播を記述する. 波動方程式の初期値問題においては周知のとおり, 初期エネルギーが負のとき方程式の解は時間について大域的に存在しないことがある. 最近 Levine 氏と Todorove 氏は任意の与えられた正の初期エネルギーに対しある初期値に対する条件のもとで波動方程式の解が爆発することを証明した. また Gazzola 氏と Squassina 氏は任意の与えられた正の初期エネルギーの場合波動方程式の解が時間に

ついて大域的に存在しない初期データに関する条件を挙げたが，その証明は複雑であり他の型の方程式に対して適用することは困難のように思われる．本論文の第二のテーマは様々な波動方程式に対し，任意の与えられた正の初期エネルギーの場合に対し波動方程式の時間発展問題の解が爆発する初期値についての条件をある種の統一的な視点から与えることにある．それらの方程式は次の四つの形の波動方程式である．

- Klein-Gordon 方程式:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + m^2 u(t,x) = f(u) \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{4}$$

ここに u は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の実数値の未知関数を表し, $u_0(x)$ と $u_1(x)$ は実数値関数であり, $m \neq 0$ は実定数であり, 非線形の項 $f(u)$ は次の条件を満たす: ある $\epsilon > 0$ が存在して, どんな $s \in \mathbb{R}$ に関しても,

$$f(s)s \geq (2+\epsilon)F(s), \tag{5}$$

が成立する, ここに $F(s) = \int_0^s f(\xi)d\xi$. 明らかに $f(s) = |s|^{p-1}s$ は $0 < \epsilon < p-1$ のとき (5) をみたす.

- inhomogeneous medium の中の波動方程式:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \rho(x)^{-1}\Delta u(t,x) + u_t + m^2 u = f(u) \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{6}$$

ここに u は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の実数値の未知関数を表し, $u_0(x)$ と $u_1(x)$ は実数値関数であり, m は実定数であり, 非線形の項 $f(u)$ は条件 (5) をみたし, $\rho(x)$ は次の条件をみたす：

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\rho(x) > 0$ であり, $\gamma \in (0,1)$ のとき $\rho \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ および $\rho \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である.

この方程式は数理物理学の様々な領域, 地球物理学, および海洋音響学におけるアプリケーションにおいて用いられる.

- 非負のポテンシャルをもつ連立 Klein-Gordon 方程式系:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + m_1^2 u(t,x) + K_1(x)u(t,x) = a_1|v(t,x)|^{q+1}|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) \\ v_{tt}(t,x) - \Delta v(t,x) + m_2^2 v(t,x) + K_2(x)v(t,x) = a_2|u(t,x)|^{p+1}|v(t,x)|^{q-1}v(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(t,x) = u_1(x), \\ v(0,x) = v_0(x), v_t(t,x) = v_1(x) \end{cases} \tag{7}$$

ここに u と v は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の実数値の未知関数を表し, パラメーター a_1 と a_2 は正の定数, 二つの質量は非零であり, $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$, $K_1(x)$ と $K_2(x)$ は二つの非負関数である.

- 非線形 Kirchhoff 方程式:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - k(\|\nabla u(t,\cdot)\|_2^2)\Delta u(t,x) + u_t(t,x) = f(u) \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{8}$$

ここに u は $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ の実数値の未知関数を表し, Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界な Lipschitz 領域であり, f は条件 (5) を満たし, k は次の条件を満足する: ある $\epsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して,

$$k(s) \geq k_0 > 0$$
$$K(s) > \frac{2+\epsilon_0}{2+\epsilon} sk(s)$$

が成立する．ここに ϵ は条件 (5) と同じもので，k_0 は正の定数であり，$K(s)=\displaystyle\int_0^s k(\xi)d\xi$ である．この方程式は，Kirchhoff 氏により非線形の弾性振動問題を記述するものとして確立された．

以上の Schrödinger 方程式と波動方程式に対して，本論文では各章において次の主要結果を述べる．

- 第一章で inhomogeneous 非線性の項を持つ Schrödinger 方程式 (1) を考える．$V(x)$ がある条件を満たすとき，変分法の手法より，まず条件付き極値問題を構成する．そのうえで scaling argumenl と Strauss 氏の compactness lemma を応用しこの極値問題を解く．そして方程式 (1) の時間発展問題から生成される流れは三つの不変集合を持つことを示す．以上より $3\leq p<\infty$ のとき空間二次元の場合に時間発展問題の大域解の存在性と blow up に関する sharp conditions を得る．さらに方程式の解が無限の時間の後に blow up するある現象を論ずる．

- 第二章では $2<\lambda<\min\{n,4\}$ および $n\geq 3$ の場合に Harmonic ポテンシャルを持つ Hartree 方程式 (2) を考える．この章でも変分法を用いる．まず Strauss 氏の compactness lemma, Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式と変分法の議論より方程式 (2) に関して Euler 方程式の基底状態 ϕ の存在を証明する．方程式 (2) の定在波 $\exp(i\omega t)\phi$ の強い不安定性を得るため，補助の極値問題を考える．そして方程式 (2) の時間発展問題から生成される流れの不変集合を構成し，初期値がこの不変集合の中に入るとき方程式の解が blow up するという結果を証明する．最後に適切な条件のもとに方程式 (2) の定在波 $\exp(i\omega t)\phi$ に関する強い不安定性を証明する．

- 第三章で Klein-Gordon 方程式 (4) を考える．Klein-Gordon 方程式の初期値問題においては周知のとおり，初期エネルギーが負のとき Klein-Gordon 方程式 (4) の解は時間について大域的に存在しないことがある．一般的な非線形項を持つ Klein-Gordon 方程式 (4) に対して，任意の与えられた正の初期エネルギーを持った初期値がある条件を満足すれば，方程式 (4) の解は有限時間内に爆発し，したがってこの場合も解は大域的に存在しないという結果を得る．証明の手法は Levine 氏の凹議論を応用する．

- 第四章では inhomogeneous medium の中の波動方程式 (6) を考える．まず非線形項が一般的な場合に負の初期エネルギーにたいし方程式 (6) の解がある有限の時間において爆発するという結果を得る．初期値がゼロのエネルギーを持つ場合も初期値がある 1 つの条件を満足すれば解はある有限の時間において爆発することも示す．任意の正の初期エネルギーに対しても初期値がある条件を満足すれば対応する方程式 (6) の解が有限時間内に爆発するという結果を得る．

- 第五章で連立 Klein-Gordon 方程式系 (7) を考える．この系に対して，不動点原理より系 (7) の解が局所的に存在することが証明される．空間の次元が 2 と 3 のとき，変分法を使って解の爆発が得られる．この結果を用いて方程式系 (7) の定在波の instability も証明する．ただし，ある場合は大域的な解が存在する場合があることも示す．また，一般の空間次元の場合に，任意の初期エネルギーに対して解が有限時間内に爆発する初期値に対するある条件をあげる．

- 第六章では Kirchhoff 方程式 (8) を考える．Kirchoff 方程式 (8) に対し第三章の手法を拡張し，任意の正の初期エネルギーを持った初期値がある条件を満足すれば　Kirchoff 方程式の解が有限時間内に爆発することを証明する．