論文審査の結果の要旨

氏名　　王　　言　金

王言金氏の仕事の主題は非線形シュレーディンガー方程式および非線形波動方程式の解の爆発が起こる条件の研究である．

非線形波動方程式の場合、非線形項が大きいとき解が爆発する現象はよく知られている．これは初期エネルギーが負の場合に対応する．非線形項が小さい場合すなわち初期エネルギーが正の場合は必ずしも爆発しない場合があるが，ある条件の下では解が爆発することは最近幾人かの研究により知られている．王氏は解の初期値関数に依存するある汎関数を導入し一般の正の初期エネルギーの場合をその汎関数の正負によって分け，その汎関数の正負により解の非爆発と爆発を分類することに成功した．

波動方程式の爆発の条件に関する王氏の仕事は多くの方程式に適用できる．これまでに王氏が彼の方法を適用して初期エネルギーが正の場合に解の爆発の条件を与えた方程式は以下の通りである．

1. 質量が正の場合の Klein-Gordon 方程式
2. 非均質媒体の中を伝播する波動の方程式
3. 非負ポテンシャルを持つ連立の Klein-Gordon 方程式
4. 非線形 Kirchhoff 方程式
5. 粘弾性項を持った波動方程式
6. 張力項を持った 4 階波動方程式

質量が正の場合の Klein-Gordon 方程式を例にとって王氏の方法を説明する．質量が正ならそれは 1 と仮定しても一般性は失われないからこの方程式は

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u + u - f(u) = 0, &\qquad (t,x) \in [0,T) \times R^n \quad (n \geq 1)\\
u(0,x) = u_0(x), &\qquad x \in R^n\\
u_t(0,x) = u_1(x), &\qquad x \in R^n
\end{aligned}
$$

と書ける．ただし非線形項 $f(u)$ は Levine の条件: ある $\epsilon > 0$ が存在して任意の $s \in R$ に対し

$$f(s)s \geq (2+\epsilon)F(s) \quad \left(F(s) = \int_0^s f(\xi)d\xi\right)$$

を満たすものとする．このような非線形項を持つ場合一般の抽象的波動方程式に対し，初期エネルギーが負であれば解は大域的に存在しないことは Levine(1974) によって示されている．上の方程式の場合時刻 t におけるエネルギー $E(t)$ は

$$E(t) = \frac{1}{2}\int (|u_t(t,x)|^2 + |u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 - 2F(u(t,x)))dx$$

により定義され，時間に依存しない一定値を取る．王氏は補助の汎関数として

$$I(u) = \int (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx - \int f(u(x))u(x)dx$$

を導入し，初期エネルギーが正の場合つまり

$$E(0) > 0$$

の時は本質的に

$$I(u_0) < 0$$

という補助条件を加えれば解は有限時刻 $t = T_{\max} \leq T(< \infty)$ において爆発することを示した．この条件 $I(u_0) < 0$ は，非線形項が小である $(E(0) > 0)$ 場合の中でも非線形項がある程度大きい場合を取り出す条件である．証明の方法は上の条件の下に

$$G(t) = \int |u(t,x)|^2 dx (\geq 0)$$

とおけば $\alpha = \epsilon/4$ とするとき $t \in (0,T)$ に対し

$$(G(t)^{-\alpha})' < 0, \quad (G(t)^{-\alpha})'' \leq 0$$

を満たすことを示す．すると $G^{-\alpha}$ は凹 (concave) 関数で，ある $T_{\max} \leq T$ に対し $t \to T_{\max}$ のとき $G(t)^{-\alpha} \to 0$ となり，このことから $G(t) \to \infty$ $(t \to T_{\max})$ がいえる．$G(t)$ の定義からこれは $t \to T_{\max}$ の時 $u(t)$ が爆発することを示す．

他の波動方程式の場合も少々複雑になる場合もあるが基本的にこのように凹関数に帰着させる方法による．

このような波動方程式に対し，シュレーディンガー方程式はたとえば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i}u_t(t,x) - \Delta u(t,x) - V(x)|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) = 0 \\
&u(0,x) = u_0(x)
\end{aligned}$$

のようになり，波動方程式が実時間についての方程式とすれば虚時間についての方程式となる．この場合エネルギー (線形で言うハミルトニアンに相当する) の符号の役割が波動方程式と逆転し，エネルギー $E(0) < 0$ の場合に相当するのはエネルギーが基底状態の自由エネルギーより大きい場合である．これは線形で言えば連続スペクトルに対応する場合である．波動方程式の場合は実時間であるので上述のように $E(0) < 0$ の場合は解の爆発が起こるが，シュレーディンガー方程式の場合は時間が虚時間であるため解は複素平面上を振動する関数となり，振動積分として収束し時間に関し有界な解となる．逆にエネルギーが基底状態の自由エネルギーより小さい場合は波動方程式の $E(0) > 0$ の場合に相当し，補助関数

$$I(u) = \frac{1}{2}\int \left(|u(x)|^2 - \frac{2}{p+1}V(x)|u(x)|^{p+1} \right) dx$$

により爆発解か有界な解になるかを判別することができる．この場合波動方程式と同様非線形項が大きな場合つまり

$$I(u_0) < 0$$

のとき解は有限ないし無限時間内で爆発する．

シュレーディンガー型の方程式として王氏が考察したもう一つの方程式は多体電子系の運動の統計的近似を記述する Hartree 方程式である．この方程式の場合も基底状態を求める変分問題を解いて上のシュレーディンガー方程式の場合と同様の結果を得た．

波動方程式についての結果もシュレーディンガー方程式についての結果も双方とも独創的な方法を用い，かつ巧妙な議論および評価法を考案しており，王氏独自の結果となっている．同時にすべて新結果であり，この分野の研究に大きく貢献する仕事である．

よって、論文提出者　王　言金　は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。