論文の内容の要旨

論文題目　On stochastic PDEs with non-Lipschitz coefficients and invariant measures for a stochastic heat equation
(非リプシッツ係数を持つ確率偏微分方程式および確率熱方程式の不変測度について)

氏　名　謝　賓 (XIE Bin)

本論文では, 非リプシッツ係数を持つ無限次元確率微分方程式の解の存在と一意性および確率熱方程式の不変測度について考察する. 無限次元確率微分方程式とはランダムな揺らぎを持つ無限次元微分方程式のことである. これは統計力学, 場の量子論, 工学, 経済学, 海洋学, 集団遺伝学など種々の分野にわたって用いられている. 基本になるランダムな揺らぎはある Banach 空間上のブラウン運動であるが, 最近ではもっと広いノイズ (たとえば, Banach 空間-値の Lévy ノイズ) を持つ無限次元確率微分方程式についても研究がなされている. この論文では主にある種の特異性を持つノイズ, あるいは Hilbert 空間上のブラウン運動が加わった無限次元確率微分方程式についてそれぞれ調べる.

第一章は序文である.

第二章では次のような (広義) 無限次元 Langevin 方程式を考察する.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \dot{N}(t,x), \quad x \in (0,\infty) \tag{1}$$

ただし, $\dot{N}(t)$ はある種の特異性を持つノイズである. この方程式の解 $u(t)$ を (広義) 無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程という. 有界区間の上の方程式 (1) に対して, $\dot{N}(t)$ を時空ガウス型ホワイトノイズとすれば, たとえば [3] により Wiener 測度が無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程 $u(t)$ の不変測度となることが知られている. $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の Lévy 測度 ν に対し, $\mu_{(a,b,\nu)}$ を生成要素 (a,b,ν) を持つ Lévy 過程の分布とする. 本章では [3] の結論を拡張し, $\mu_{(a,b,\nu)}$ が無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程 $u(t)$ の不変測度となるようなノイズ $\dot{N}(t)$ を構成することを中心に論じる. ノイズ $\dot{N}(t)$ を構成するために, まず $\wp = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(\xi_i, y_i, w_i)}$ を平均測度 $d\nu dy d\mu$ を持つ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times W_0$ 上の Poisson 配置とする. ただし, $W_0 := \{u \in C([0,\infty),\mathbb{R}) : u(0) = 0\}$, μ は W_0 上の Wiener 測度である. このとき, 形式的に次のような特異性を持つランダムな測度 $M(t)$ を考える.

$$M(t,dx) = -\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \int_0^t \delta_{B_i(s)}(dx)\, dw_i(s)$$

ここで, $B_i(t)$ は出発点 y_i を持ち Skorohod 方程式により w_i から定まる反射壁ブラウン運動である. 最後に $\dot{W}(t)$ を $\wp$ と独立な時空ガウス型ホワイトノイズとして, ノイズ $\dot{N}(t)$ を

$$N(t) = M(t) + \sqrt{a}W(t)$$

で定義する. このようにして構成された $\dot{N}(t)$ を加えた半直線上の Dirichlet 条件 $u(t,0)=0$ を満たす確率熱方程式 (1) について議論する. Langevin 方程式 (1) の解の存在について調べるために, 任意の $r>0$ に対して Hilbert 空間 $L^2_r(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+, e^{-rx}dx)$ を導入する. $\dot{W}(t)$ に関する確率積分が知られているが, $M(t)$ についても確率積分を定義する必要がある. そのために, Lévy 測度 ν に関して次のような仮定をおく.

仮定 A: ある定数 K, $\kappa > 1$ と $\bar{C} > 0$ が存在し, $\nu(\{\xi; |\xi| \ge x\}) \le \bar{C}(\log x)^{-\kappa}$, $x \ge K$ が成り立つ.

この仮定の下で, 適切な関数空間の要素 φ に対し, $M(t,dx)$ に関する確率積分 $\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s,y) M(dsdy)$ が定まり, 特に, ランダムな畳み込み $\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} p(t-s,x,y)\, M(dsdy)$ は数学的な意味を持つ. ただし, $p(t,x,y)$ は $\mathbb{R}_+$ 上の Dirichlet 条件 $u(t,0)=0$ を満たす熱方程式の基本解である. したがって, Langevin 方程式 (1) の解 $u(t)$ を構成することができ, $L^2_r(\mathbb{R}_+)$ に値をとる弱解の存在と一意性が言え, さらに Kolmogorov の正規化定理を適用すれば, 解 $u(t)$ は t について $(1/4-\epsilon)$-Hölder 連続であることが証明できる. ただし, $\epsilon > 0$ は任意である. 最後に ν に対応する Lévy 過程の見本路が $L^2_r(\mathbb{R}_+)$ に入ると仮定し, 確率測度 $\mu_{(a,b,\nu)}$ と Ornstein-Uhlenbeck 過程 $u(t)$ の不変測度の関係を論ずることができる. 実際, 次の定理が言える.

定理 1. **仮定 A** が満たされるならば,
(1) Langevin 方程式 (1) の初期値 $u_0 \in L^2_r(\mathbb{R}_+)$ を持つ弱解 $u(t) \in C([0,\infty), L^2_r(\mathbb{R}_+))$ が一意的に存在する.
(2) a と ν が与えられたとき, ν に対応する Lévy 過程の見本路が $L^2_r(\mathbb{R}_+)$ に入るならば, 任意の $b \in \mathbb{R}$ に対し, $\mu_{(a,b,\nu)}$ は (1) の不変測度である. 逆に, $\int_{|\xi|>1} |\xi|\nu(d\xi) < \infty$ であれば, $\tilde{\mu}(L_\ell(\mathbb{R}_+)) = 1$ を満たす不変測度 $\tilde{\mu}$ は $\{\mu_{(a,b,\nu)}; b \in \mathbb{R}\}$ の重ね合わせである. ここで, $L_\ell(\mathbb{R}_+) = \{u \in L^2_r(\mathbb{R}_+); \exists b(u) = \lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} \in \mathbb{R}\}$ である.

可分な実 Hilbert 空間 H 上の Lévy ノイズを持つ Ornstein-Uhlenbeck 過程の研究が最近なされている [1] が, 本章の結論とは直接関係しない. 我々のノイズ $N(t)$ は t について連続であることに注意しておく.

第三章では H 上の柱状ブラウン運動について非リプシッツ係数を持つ無限次元確率微分方程式を考える. H 上の有界線形作用素全体のなす集合を $L(H,H)$ と書く. 係数 $F:[0,T]\times H \to H$ と $G:[0,T]\times H \to L(H,H)$ を持つ次の形の無限次元確率微分方程式 (ISDE と略記する) を考える.

$$dX^\kappa(t) = \big(\kappa A X^\kappa(t) + F(t, X^\kappa(t))\big)dt + G(t, X^\kappa(t))dW(t) \tag{2}$$

ただし, $\kappa \in \mathbb{N}$, $W(t)$ は H 上の柱状ブラウン運動, A は半群 $S(t)$ の生成作用素で, ある $\alpha < 1/2$ に対し, $\int_0^T s^{-2\alpha}\|S(s)\|^2_{HS} ds < \infty$ を満たすと仮定する. ただし, $\|\cdot\|_{HS}$ は Hilbert-Schmidt 作用素のノルムを表す. さらに, 係数 F と G は次のリプシッツ条件より一般の仮定 **B** を満たすと仮定する.

B1: $[0,T]\times\mathbb{R}_+$ 上の非負関数 f と g が存在し, 任意の $t\in[0,T]$ および $X, Y \in L^r(\Omega,\mathcal{F};H)$ に対し,

$$\mathbb{E}[|F(t,X)|^r + \|G(t,X)\|^r] \le f(t, \mathbb{E}[|X|^r]),$$
$$\mathbb{E}[|F(t,X)-F(t,Y)|^r + \|G(t,X)-G(t,Y)\|^r] \le g(t, \mathbb{E}[|X-Y|^r])$$

が成立する. ただし, $L^r(\Omega,\mathcal{F};H) := \{X:\Omega\to H; \mathbb{E}[|X|^r] < \infty\}$.

B2: 任意の $t \in [0,T]$ に対して, $f(t,u)$ および $g(t,u)$ は u について単調増加な連続関数である. さらに, $f(t,u)$, $g(t,u)$ は次の条件を満たすと仮定する. 任意の正定数 β と u_0 に対し, 積分方程式 $u(t) = u_0 + \beta\int_0^t f(s,u(s))ds$ は $[0,T]$ で解 $u(t)$ を持つ. しかも, $g(t,0)=0$, 任意の $\beta>0$ について, $z(0)=0$ を満たす非負な連続関数 $z(t)$ が $z(t) \le \beta\int_0^t g(s,z(s))ds$, $t\in[0,T]$ を満たせば, $z(t)\equiv 0$ である.

リプシッツ条件と1次増大条件を満たす係数 F と G を持つ ISDE(2) については解の存在と一意性が成り立つことが一般的に知られていて, 解を構成するために, Picard の逐次近似法が用いられる. リプシッツ条件を満たさない場合には, 不動点理論など解析学的な手法を用いた研究がある. この章では, これとは異なり, Picard の逐次近似法を用いて, 仮定 **B** を満たす係数 F と G に拡張し, ISDE(2) について $C([0,T],H)$ に入る解を構成する. さらに, 任意の $\kappa \in \mathbb{N}$ に対して, ISDE(2) の解 $X^\kappa(t)$ は一意的であることを示す. 次に, 作用素 $-A$ は点スペクトル $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ正定値な自己共役作用素, $\lambda_i = 0$ の重複度は $n_0 \geq 1$ であると仮定すると, 弾性係数 $\kappa \to \infty$ としたとき, 解 $X^\kappa(t)$ のふるまいが分かる. ただし, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ である. このような極限問題は元々舟木 [3] によって導入され, 「ランダムな媒質中を漂う弦のランダムな運動について, 弾性率 κ を無限大にすると, 何が起こるか」という物理的な興味から定式化されたものである. もしある $C>0$ があって, $g(t,x) = Cx$, 係数 F, G が t に依存しなければ, $X^\kappa(t)$ はある意味で有限次元確率微分方程式 $dY(t) = PF(t,Y(t))dt + PG(t,Y(t))dW(t)$ の解 $Y(t)$ に収束することが言える. ただし, P は H から $span\{e_1,\cdots,e_{n_0}\}$ への直交射影である. ここで, $\{e_i\}_{i=1}^{n_0}$ は $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n_0}$ に属する正規直交系である . 言い換えれば, 次の結論が示せる.

定理 2. $\alpha < 1/4$, $\sum_{m=n_0+1}^{\infty} \lambda_m^{-1} < \infty$ が満たされるとする.
(1) 任意の $r < 1/\alpha$ と $0 < T_1 < T_2 \leq T$ に対し, $\lim_{\kappa\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{T_1\leq t\leq T_2} |X^\kappa(t) - Y(t)|^r\right] = 0$.
(2) $\kappa \to \infty$ とき, $X^{\kappa^2}(t)$ は a.s. の意味で $(0,T]$ の任意のコンパクトな部分区間において $Y(t)$ に一様に収束する.

第四章では次の形の放物型確率偏微分方程式 (SPDE) の解の存在および一意性について議論を行う.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + b(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x,u(t,x))\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}W(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

ここで, 係数 b, $\sigma : [0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はそれぞれ外力項と拡散係数と呼ばれ, $\{W(t,x),\ t\geq 0, x\in\mathbb{R}\}$ は Brownian sheet である. この種の方程式については様々な動機の下に研究が行われてきた. 本章では, 第二章のように, Picard の逐次近似法を適用し, リプシッツ条件より弱い条件の下で, SPDE (3) の解を構成する. 特に, この方法は1次増大条件と次の条件を満たす係数 b, σ に対し応用できる.

(C) $\mathbb{R}_+$ 上の単調増加凹関数 ϕ があって, $|b(t,x,v) - b(t,x,v')|^2 + |\sigma(t,x,v) - \sigma(t,x,v')|^2 \leq \phi(|v-v'|^2)$ が成り立つ. ただし, ϕ は任意の $v>0$ に対し, $\phi(v)>0$, $\phi(0)=0$ かつ $\int_{0+}(\phi\circ\phi)^{-1}(v)dv = \infty$ を満たすとする.

一般化された Bihari 補題を援用し, SPDE(3) の解の一意性が証明できる. さらに, 解 $u(t,x)$ は時間と空間方向についてそれぞれ $1/4-\epsilon$ と $1/2-\epsilon$ 程度の Hölder 連続性を持つことも同時に示される. ちなみに本章と第三章で一意性を示すためには, ϕ の凹性が必要であることに注意しておきたい.

最後の第五章では無限次元確率微分方程式 (2) に戻り, 道ごとの一意性を主に扱う. ただし, $\kappa = 1$, 係数 F と G は t によらず連続, $W(t)$ は H 上のブラウン運動とする. 半群 $S(t)$ がコンパクト作用素であれば, ISDE(2) のマルチンゲール解が存在することが示されているが, 道ごとの一意性は未解決である. 最近, [2] で道ごとの一意性を仮定し, 解に関する種々の性質を調べている. 本章では係数について非常に弱い条件を仮定し, 適当な Lyapunov 関数を求め, 道ごとの一意性を中心に考察する. ここでは ϕ の凹性を仮定する必要はない. さらに, 同様の手法を用いて, Markov 過程 $X(t)$ は Feller 過程であることも示す.

参考文献

[1] D. APPLEBAUM, *Martingale-valued measures, Ornstein-Uhlenbeck processes with jumps and operator self-decomposability in Hilbert space.* Lecture Notes in Math., 1874, Springer, Berlin, (2006) 171–196.

[2] Y. EL BOUKFAOUI AND M. ERRAOUI, *Remarks on the existence and approximation for semilinear stochastic differential equations in Hilbert spaces.* Stochastic Anal. Appl. **20** (2002), no. 3, 495–518.

[3] T. FUNAKI, *Random motion of strings and related stochastic evolution equations*, Nagoya Math. J., **89** (1983) 129–193.