論文内容の要旨

論文題目 Blow-up at space infinity and criteria for total blow-up in nonlinear heat equations (非線形熱方程式の空間無限遠での爆発と空間全体での爆発について)

氏　名　下 條 昌 彦

1. 問題背景

本論文の Chapter 2 では，半線形熱方程式に対する初期値問題

$$
(1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}
$$

を考え，解が無限遠で爆発するという現象を論じた．特に解の爆発時刻における解の形状について解析した．われわれは非線形項 f には次の増大度の条件を仮定する．

$$
(2)\qquad \lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u(\log(1+u))^b} = \infty \quad (b > 2).
$$

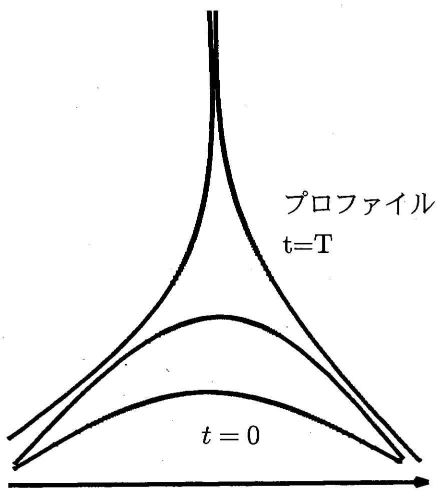
より具体的には $f(u) = u^p$ $(p > 1)$，e^u などの関数が含まれる．初期値問題 (P) の解がある時刻 $T = T(u_0)$ で**爆発する**とは，

$$
\limsup_{t \nearrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \infty
$$

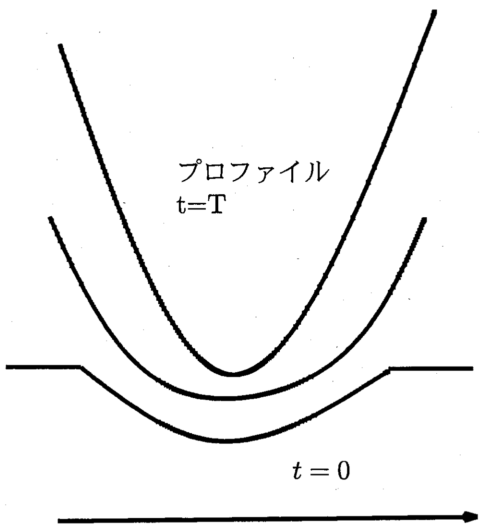
が成り立つことをいう．この時刻 T を**爆発時刻**と呼ぶ．解が時刻 T で爆発するとき

$$
B(u_0) := \left\{ a \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \limsup_{x\to a,\, t\nearrow T} |u(x,t)| \to \infty \right\}
$$

を**爆発集合**と呼び，その元を**爆発点**という．放物型方程式のア・プリオリ評価から関数 $u(x,T) := \lim_{t\nearrow T} u(x,t)$ が任意の $x \in \mathbb{R}^N \setminus B(u_0)$ に対してが定義可能であることがわかる．この関数 $u(x,T)$ を爆発時刻における解の**プロファイル**と呼ぶ．また，**無限遠でのみ爆発する**とは，解は爆発するが，任意の有界集合 K に対して $\limsup_{t\to T(u_0)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(K)} < \infty$ が成り立つことを意味する．このときプロファイル $u(x,T)$ が $\mathbb{R}^N$ 上において存在する．



通常の爆発



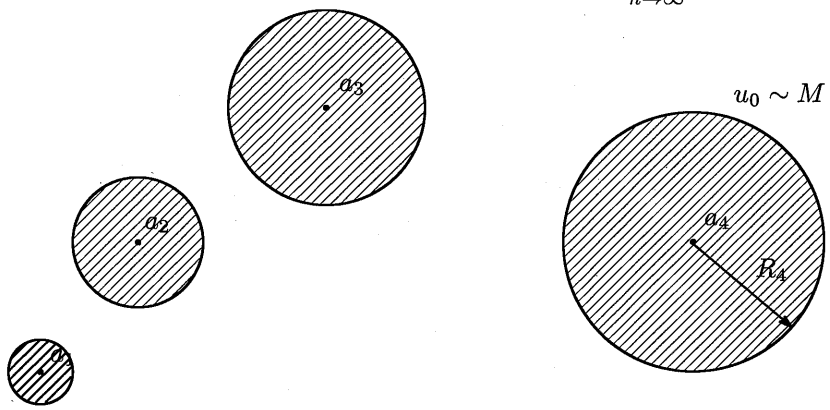
無限遠での爆発

非線形熱方程式の爆発現象の解析は Kaplan (1963) や Fujita (1966) の先駆的な仕事以来，多くの研究者の努力により発展してきた．そして，80 年代に入ると「どのような場合に解が爆発するか」だけでなく，「解はどこで爆発するか」に関する研究が盛んになった．Weissler (1984), Friedman-McLeod (1985) は初期境界値問題において適当な初期値を与えると解が 1 点のみで爆発すること示した．さらに，Chen-Matano (1989) は $N=1$ のとき初期境界値問題で任意の爆発解の爆発集合は有限集合であることを証明している．一方，Giga-Kohn (1989) は $N-1$ 次元球面を爆発集合にもつような例を構成している．その後，Velázquez (1993)，Zaag (2002) らによって爆発集合の大きさや滑らかさなども研究されている．

次に空間無限遠での爆発に関して知られていたことを述べる．この問題に関する先駆的な結果として，空間 1 次元単独方程式の場合に Lacey [3] は半直線上の初期境界値問題の解に対して無限遠のみで爆発する例を示した．また，Giga-Umeda [1] は高次元の単独方程式 $u_t=\Delta u+u^p$ の初期値問題を扱い，初期値 u_0 がある定数 $M>0$ に対して $0\le u_0\le M$, $u_0(x)\to M\ (|x|\to\infty)$ をみたすときに無限遠のみでの爆発が起こることを示した．Shimojō [4] は [1] の結果を改良し，より広いクラスの初期値に対して無限遠のみでの爆発が起こることを示した．より正確には，非線形項が $f(u)=u^p\ (p>1)$ の場合につぎのことを示した．

(H1) ある定数 $M>0$ に対して $0\le u_0\le M, u_0\not\equiv M$.

(H2) 点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}^N$ と $R_n\to\infty\ (n\to\infty)$ があって $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_0-M\|_{L^1(B_{R_n}(a_n))}=0$.



このとき以下が成立する．

(i) $T:=T(u_0)=T(M)$

(ii) $B(u_0)=\emptyset$（無限遠のみでの爆発）

(iii) $\lim_{n\to\infty}u(a_n,T)=\infty$.

この問題に関しては Giga-Umeda [2] がある $p>1$ に対して $f(\sigma)/\sigma^p\to\infty\ (\sigma\to\infty)$ が成り立つ場合に拡張している．本論文のプロファイルに関する結果からもこの主張が (2) を満たすより広いクラスの非線形項に対しても成立することもしたがう．

2. 爆発時刻におけるの解の形状と爆発後の解の延長について

一方，これまでのところ爆発時刻での解の形状や爆発後の挙動に関してはあまり言及されていなかった．そこでわれわれは解のプロファイルの空間無限遠での挙動を解析した．さらに空間遠方での増大度には，ある上限があることとを示すことができた．

以下 $\varphi(s)$ は次の微分方程式の解とする:

$$\dot\varphi=-f(\varphi)\ (s>0),\quad \lim_{s\searrow 0}\varphi(s)=\infty.$$

具体的には次のような関数である．

$$\varphi(s)=\begin{cases}(p-1)^{-\frac{1}{p-1}}s^{-\frac{1}{p-1}} & \text{if}\quad f(u)=u^p\ \ (p>1),\\ -\log s & \text{if}\quad f(u)=e^u.\end{cases}$$

$G(x,t)$ は全空間における線形熱方程式の基本解とする．すなわち $G(x,t):=\dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. また全空間における線形熱方程式 $v_t=\Delta v$ の初期値 v_0 の解を $e^{t\Delta}v_0$ と書き表す．

定理．(プロファイルの特徴付け，普遍評価，漸近的な逆問題 [5])

(i) 初期値 u_0 が (H1) と $T = T(u_0) = T(M)$ を満たすとする．ある定数 $c > 0$ があって次の評価式が成り立つ:

$$\varphi(e^{T\Delta}\eta_0) \le u(x,T) \le \varphi(c\,e^{T\Delta}\eta_0), \quad \textit{where} \quad \eta_0 := \varphi^{-1}(u_0) - T.$$

(ii) 条件 (H1) と $T = T(u_0) = T(M)$ を満たす任意の初期値 $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ に対して，ある定数 $c_1 > 0$ と $a \in \mathbb{R}^N$ があって

$$u(x,T) \le \varphi\big(c_1\,G(x-a,T)\big), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

実はこの評価式は最良である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (H1) と $T = T(u_0) = T(M)$ を満たす適当な初期値 $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ とある定数 $c_2 > 0$ があって

$$u(x,T) \ge \varphi\big(c_2\,G(x,T+\varepsilon)\big), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) 関数 $\rho(x)$ は $\lim_{|x|\to\infty}\rho(x) = \infty$ を満たす関数とする．さらに関数 ρ が "増大度に関する適当な条件" を満たすとする．このとき条件 (H1) と次を満たす初期値 u_0 が存在する．

$$\frac{u(x,T)}{\rho(x)} \to 1 \quad (|x| \to \infty).$$

(i) によりプロファイルの空間に関する漸近的な挙動を知るには線形熱方程式を解いて，それに簡単な非線形変換を施せば良いことがわかる．すなわち次の図式はオーダーとしては可換である．

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, "\varphi^{-1}(\cdot)-T"] \arrow[d] & \eta_0 \arrow[d, "e^{T\Delta}(\cdot)"] \\
u(\cdot,T) & e^{T\Delta}\eta_0 \arrow[l, "\varphi(\cdot)"']
\end{tikzcd}$$

上記 (ii) の普遍評価を具体的な非線形項に対して書き表すと次のようになる．

$$u(x,T) \le \begin{cases} C\exp\left(\frac{|x-a|^2}{4(p-1)T}\right) & \text{if} \quad f(u) = u^p\,(p>1), \\ \frac{|x-a|^2}{4T} + C & \text{if} \quad f(u) = e^u \end{cases}$$

主張 (iii) の ρ に関する増大度の条件は $f(u) = u^p\,(p>1)$ の場合は $\lim_{|x|\to\infty}|\nabla\rho(x)|/\rho(x) = 0$ となり，$f(u) = e^u$ の場合は $\lim_{|x|\to\infty}|\nabla\rho(x)| < \infty$ と書ける．また (iii) の結果から空間無限遠方での発散の増大度がいかに緩やかであっても，適当な初期値を取れば，そのプロファイルがさらに緩やかな増大度をもつようにできることもわかる．

論文では爆発後の解の挙動に関しても解析した．関数列 $f_m(u) := \min\{f(u), m\}$ $(m = 1,2,3,\cdots)$ を導入する．u_m は次の近似問題の解とする:

$$\begin{cases} (u_m)_t = \Delta u_m + f_m(u_m), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u_m(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

解 u_m は任意の $0 \le t < \infty$ において存在して，比較原理より $u_m(x,t) \le u_{m+1}(x,t)$ $(m = 1,2,3,\cdots)$ が成り立つ．そこで次の関数を定義する．

$$\bar{u}(x,t) := \lim_{m\to\infty} u_m(x,t) \in [0,\infty], \qquad x \in \mathbb{R}^N,\, t \in [0,\infty).$$

この関数 $\bar{u}$ は **最小延長解** (minimal continuation) と呼ばれている．この関数 $\bar{u}$ は爆発時刻までは古典解と一致することが知られている．次に

$$T^c = T^c(u_0) := \sup\{t \ge 0;\ \bar{u}(x,t) < \infty \quad \text{for a.e } x \in \mathbb{R}^N\}.$$

を導入する．このとき $T(u_0) \le T^c(u_0)$ であり，$\bar{u}(\cdot,t) \equiv \infty$ $(t > T^c)$ が成り立つことが知られている．すなわち，時刻 $t = T^c(u_0)$ 以降は弱解の意味でも解の概念を定義することは不可能である．爆発問題の研究者は $T(u_0) = T^c(u_0)$ が成り立つとき爆発は**完全**であるといい，$T(u_0) < T^c(u_0)$ のとき爆発は**不完全**であるという．

定理．(完全爆発 [5]) 仮定 (H1),(H2) のもとで解は完全爆発する．

3. 空間全体での爆発

Chapter 3 では準線形熱方程式

$$u_t = \Delta u^m + u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \tag{3}$$

を考察した．ただし $m > 1\ p > 1$ であり，初期値 u_0 は次の条件を満たすとする:

$$0 < u_0 \le M, \quad u_0 \not\equiv M, \quad \text{and} \quad \lim_{|x|\to\infty} u_0 = M. \tag{4}$$

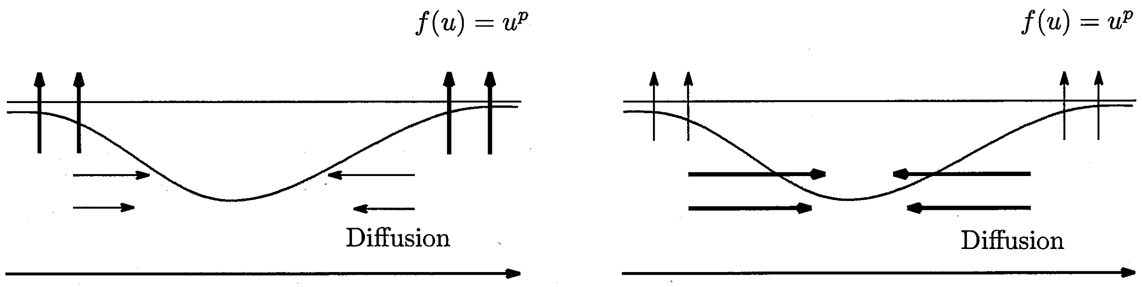
この式を見れば容易に分かるように $0 < m < 1$ のとき熱伝導率 mu^{m-1} は u が大きい領域ではとても小さくなるので，半線形方程式 $(m = 1)$ の場合に比べて無限遠方における拡散の効果は反応項 u^p の影響に比べて相対的に小さくなるはずである．これは無限遠方に熱量が拘束されることを意味する．したがってこの場合も無限遠方のみでの爆発が起こると予想される．これは Seki [7] において厳密に証明されている．

一方 $m > 1$ の場合は，熱伝導率 mu^{m-1} は u に対して単調増大であり u が大きいほど無限遠方から原点に向かう熱の伝播速度がいくらでも大きくなる．したがって爆発時刻において熱量が無限遠から原点に向かってとても早いスピードで流れ込んでくるはずである．この現象を眺めていると次のような疑問が浮かぶ．“$m \in (1, \infty)$ の場合も無限遠方での爆発という現象が保持されるのであろうか？” この疑問については部分的な結果が得られている．Seki-Suzuki-Umeda [8] によると $1 < m < p$ かつ $p > 1$ ならば無限遠方での爆発しか起こらない．この結果を見て自然に湧いてくるのは次の疑問である．

$m > p > 1$ まで拡散の効果を強めると原点の近くでも爆発が起こるだろうか？

われわれはこの場合になって初めて新しい現象が起こり，方程式 (3) の解 u が $\mathbb{R}^N$ 全体で爆発が起こることを示した．

$1 \le m < p \Rightarrow B(u_0) = \emptyset$ $\qquad\qquad$ $m > p > 1 \Rightarrow B(u_0) = \mathbb{R}^N$



定理．(全体爆発 [6]) $p > 1$ かつ $m > p$ とする．方程式 (3) の解で(4) を満たす適当な初期値 u_0 があって $B(u_0) = \mathbb{R}^N$.

また Chapter 3 では半線形方程式 $u_t = \Delta u + f(u)$ において非線形項の増大度がとても緩やかなときも同様の現象が起こることも証明している ([6]).

References

[1] Y. Giga and N. Umeda, *On blow up at space infinity for semilinear heat equations*, To appear in J.Math.Anal.Appli
[2] Y. Giga and N. Umeda, *Blow up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations*, Bol. Soc. Paran. Mat. 23 (2005), 9-28.
[3] A. A. Lacey, *The form of blow-up for nonlinear parabolic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** (1984), no. 1-2, 183-202.
[4] M.Shimojō 半線形熱方程式の空間無限遠での解の爆発現象とその局所性, 東京大学数理科学研究科修士論文 (2004)
[5] M.Shimojō, *The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations* ,Chapter 2 .
[6] M.Shimojō, *Total and non-total blow-up at space infinity for nonlinear parabolic equations*, Chapter 3 .
[7] Y. Seki, *On directional blow-up for quasilinear parabolic equations with fast diffusion*, J. Math. Anal. Appl, to appear.
[8] Y.Seki, R.Suzuki, N.Umeda, *Blow-up directions for quasilinear parabolic equations* ,Preprint series, University of Tokyo.