論文の内容の要旨

論文題目　**Contact Invariants and Pseudohermitian Geometry**
(接触構造の不変量と擬エルミート幾何学)

氏名　**SESHADRI Neil**　(セシャドリ ニール)

この博士論文は、接触構造の高次の微分に関係する局所的、および大域的不変量に関する3つの研究をまとめたものである。第一部では接触多様体を無限遠境界とするアインシュタイン計量の構成をし、その計量に関する繰り込み体積を考察する；また計量の構成の障害として新しい局所不変量を与える。第二部では接触多様体上の自然な複体(ルマーン複体)を用いた接触構造の解析的トーションを定義しその変分を考察する。第三部では強擬凸領域の完備アインシュタイン・ケーラー計量に関する繰り込み体積と境界の接触構造の関係式を与える。いずれも放物型幾何学(構造群が放物型部分群である幾何)の視点からの結果であり、漸近展開(繰り込み)をとおして幾何構造の高い微分を含む不変量を構成するものである。

第一論文：よく知られているように強擬凸領域には完備アインシュタイン・ケーラー計量（チェン・ヤウ計量）g^{EK} が一意的に存在する。これは領域の境界 M の CR 構造から M を無限遠境界とする完備アインシュタイン・ケーラー多様体への対応と見ることができる。本論文では、この対応の類似を可積分条件を仮定せずに構成することを考える。

実 $2n+1$ 次元コンパクト多様体 M 上に接触構造 H とそれに両立する概 CR 構造 J が与えられているとする。境界付きの $2n+2$ 次元多様体 $X := M \times (-1, 0]$ 上で $g = \rho^{-2} g_0$, ここで $\rho \in (-1, 0]$ であり g_0 は X 上の滑らか(C^∞) な対称2形式, の形の計量を考える。g^{EK} の境界挙動を一般化することにより g に次のような境界挙動を要請する。

接触多様体 (M,H) に接触形式 θ と与え、それに付随するレーブ・ベクトル場 T とレビ計量 h とり、H, θ, T を ρ–不変に X 上に拡張する。また M を $M\times\{0\}$ と同一視する。

(1) M 上で g_0 は θ^2 の関数倍 (とくに $g_0|_H = O(\rho)$);
(2) M 上で $\rho^{-1}g_0|_H$ は h と共形同値;
(3) $\|d\log\rho\|_g^2 = 1+O(\rho)$;
(4) $W\in\Gamma(H)$ に対して $g(T,W)$ は X 上で有界；
(5) X 上の 1 形式 μ,ν に対して $g^{-1}(\mu,\nu)=O(\rho)$ かつ $g^{-1}(d\rho,\mu)=O(\rho^2)$.

これらの境界条件を満たす計量 g を漸近的複素双曲型 (ACH) 計量とよぶことにする。第一論文の最初の定理はアインシュタイン方程式

$$\mathrm{Ein}_g := \mathrm{Ric}_g + 2(n+2)g = 0$$

の ACH 計量解の近似的な存在および一意性に関する次の結果である。

定理 A. 近似的なアインシュタイン方程式

$$\mathrm{Ein} = O(\rho^n), \quad \mathrm{Ein}(W,Z) = O(\rho^{n+1}),$$

ここで (W,Z) は $\Gamma(H)\times\Gamma(TX)$ を動く, をみたす *ACH* 計量 g が存在する。さらに g' が同じ方程式を満たす *ACH* 計量であれば、M を固定する X の微分同相 F で $G:=g'-F^*g$ が

$$G = O(\rho^n), \quad G(W,Z) = O(\rho^{n+1}),$$

ここで $(W,Z)\in\Gamma(H)\times\Gamma(TX)$, をみたすものが存在する。

この近似的アインシュタイン ACH 計量 g を用いることにより、(第三部で説明する) g^{EK} に関する領域の体積の漸近展開の一般化を考えることができる。負の ε に対して $X_\varepsilon := \{\rho<\varepsilon\}$ とおくとき $\mathrm{Vol}_g(X_\varepsilon)$ は有限の値をもち $\varepsilon\to 0$ のときに発散する。$\mathrm{Vol}_g(X_\varepsilon)$ の定義には g と ρ の選び方の任意性が含まれるため (M,H) から決定することはできない。しかし、その漸近展開には不変量が現れる:

定理 B. 近似的アインシュタイン *ACH* 計量 g について、漸近展開

$$\mathrm{Vol}_g(X_\varepsilon) = c_0\varepsilon^{-n-1} + c_1\varepsilon^{-n} + \cdots + c_n\varepsilon^{-1} + L\log(-\varepsilon) + O(1)$$

の係数 L は接触多様体 (M,H) の不変量である。

近似的アインシュタイン ACH 計量 g は、強擬凸領域上のフェファーマンの近似的完備アインシュタイン・ケーラー計量を一般化したものであり、第三論文で与えた CR 不変量 L が実は接触構造だけで決まることを主張している。

定理 A で与えた近似解が実は最良であり、漸近解の構成に概 CR 構造の不変量が障害として現れることも分かる。境界 M の定義関数 ρ を $g_0=\theta^2+O(\rho)$ となるように正規化し、M 上の実数値関数 $\mathcal{B}$ および H^* の断面 $\mathcal{O}$ を次のように定義する：

$$\mathcal{B} := \rho^{-n}\mathrm{Ein}(T,T)|_M$$

$$\mathcal{O}(W) := \rho^{-n-1}\mathrm{Ein}(T, W), \quad W \in H|_M.$$

命題. (i) $\mathcal{B}$ および $\mathcal{O}$ は近似的アインシュタイン ACH 計量 g の選び方によらず (M, H, θ, J) によって決定される。
(ii) 接触形式を $\widehat{\theta} = e^{2\Upsilon}\theta$ と変形するときに、$\mathcal{B}$ は変換則

$$\widehat{\mathcal{B}} = e^{-2(n+2)\Upsilon}\mathcal{B}$$

をみたす。よって $\mathcal{B}$ は (M, H, J) の不変量である。さらに $\mathcal{B} = 0$ が成り立てば 1 形式 $\mathcal{O}$ は変換則

$$\widehat{\mathcal{O}} = e^{-2(n+2)\Upsilon}\mathcal{O}_A$$

をみたす。

スカラー関数 $\mathcal{B}$ はフェッファーマンによる完備アインシュタイン・ケーラー計量の構成に現れた障害関数と一致する。可積分 CR 構造ではこれが唯一の障害不変量であり、$\mathcal{B} = 0$ であれば $\mathrm{Ein} = 0$ の漸近解の存在が知られている。$\mathcal{O}$ は可積分 CR 構造では消えるテンソルであり、ACH 計量を用いた設定で新しく発見された不変量である。

命題の示すように $\mathcal{B}$ または $\mathcal{O}$ が消えなければ、滑らかな g_0 の範囲では高次の近似を構成することはできない。そこで滑らかさの仮定を弱め、

$$g = \rho^{-2}\left(g_0^{(0)} + g_0^{(1)}\rho^n \log(\rho)\right)$$

ここで $g_0^{(0)}$, $g_0^{(1)}$ は X 上で C^∞, という形の ACH 計量を考える。

補題. 対数項をゆるす ACH 計量 g で

$$\mathrm{Ein}_g(T, T) = O(\rho^{n+1}\log(-\rho)),$$

$$\mathrm{Ein}_g(Y, Z) = O(\rho^{n+2}\log(-\rho)),$$

ここで (W, Z) は $\Gamma(H) \times \Gamma(TX)$, をみたすものが存在する。

これは漸近解の構成の第一歩の考察であり、無限次の解をえるにはさらに対数項のベキ $(\rho^n \log(-\rho))^k$ を導入する必要があると予想できる。

第二部では、接触多様体上のルマーン複体の解析的トーションを考察する。接触構造を用いれば微分形式のバンドルから部分束または商束を考えることにより、いくつかの自然なベクトル束を作ることができる。ドラーム複体にたいしてこの手続きをほどこすことにより次のような局所完全な複体 (ルマーン複体とよばれる) を構成することができる：

$$\Omega^0 \xrightarrow{d_H} \Omega^1/\mathcal{I}^1 \xrightarrow{d_H} \cdots \xrightarrow{d_H} \Omega^n/\mathcal{I}^n \xrightarrow{D} \mathcal{J}^{n+1} \xrightarrow{d_H} \mathcal{J}^{n+2} \xrightarrow{d_H} \cdots \xrightarrow{d_H} \mathcal{J}^{2n+1}$$

ここで Ω^p は p 形式の空間、$\mathcal{I}^p$ は θ で生成されるイデアル、$\mathcal{J}^p$ は θ 成分を含む p 形式の空間である。d_H は外微分から誘導される 1 階の微分作用素、D は 2 階の微分作用素である。この複体のコホモロジーはドラーム・コホモロジーと同型である。

リーマン幾何および共形幾何に現われる解析的トーションの類似としてルマーン複体の解析的トーションをラプラシアンのゼータ関数のうまく選択した一次結合の零点での微分で定義する。$\Omega^k/\mathcal{I}^k$ と $\mathcal{J}^k$ を統一的に $\mathcal{R}^k$ と書き、$\mathcal{R}^k$ 上の 4 階のラプラシアンを

$$\Delta_k := \begin{cases} (d_H d_H^* + d_H^* d_H)^2 & \text{on } \mathcal{R}^k \text{ for } k = 0, \ldots, n-1 \\ (d_H d_H^*)^2 + D^* D & \text{on } \mathcal{R}^n \\ DD^* + (d_H^* d_H)^2 & \text{on } \mathcal{R}^{n+1} \\ (d_H d_H^* + d_H^* d_H)^2 & \text{on } \mathcal{R}^k \text{ for } k = n+2, \ldots, 2n+1 \end{cases}$$

と定義する。Δ_k のスペクトル・ゼータ関数 $\zeta_k(s)$ の一次結合

$$\kappa(s) := -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\zeta_k(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n+1}(-1)^k(k+1)\zeta_k(s)$$

を考え、接触構造の解析的トーション Tor を

$$\mathrm{Tor}(M, H, \theta, J) := \exp\left(\frac{1}{2}\kappa'(0)\right)$$

で定義する。$\kappa(s)$ の定義は接続形式 θ および概 CR 構造 J の選び方に依存することを注意しておく。

定理 C. (i) $\kappa(0)$ は θ および J の選び方によらない接触構造の不変量である．
(ii) θ および J の変形に関する接触構造の解析的トーションの変分 $\mathrm{Tor}^\bullet$ は

$$\frac{\mathrm{Tor}^\bullet}{\mathrm{Tor}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\int_M \mathrm{tr}(\alpha a_{n+1;k})\theta\wedge(d\theta)^n - \mathrm{Tr}(\alpha\mathcal{P}_k)\right)$$

をみたす。ここで $\alpha := *^{-1}*^\bullet$ また $a_{n+1;k}$ は Δ_k の熱核の対角線への制限の時刻 0 での漸近的展開の t^0 の係数、$\mathcal{P}_k$ は $\ker\Delta_k$ への直交射影である。

$\kappa(s)$ の定義にあらわれる一次結合は (i) の要請をみたすように選んだものである。$n=1$ の場合には定理をより具体的に書き下すことができる。

系. $n=1$ のとき $\kappa(0)=0$ であり、共形変形 $(\theta^\varepsilon = e^{2\Upsilon\varepsilon}\theta, J_\varepsilon = J)$ に関する Tor の変分は

$$\mathrm{Tor}^\bullet = \int_M \Upsilon(c_1\Delta_b\mathrm{Scal} + c_2\mathrm{Im}A_{11,}{}^{11})\theta\wedge d\theta - 4\mathrm{Tr}(\Upsilon\mathcal{P}_0) + 2\mathrm{Tr}(\Upsilon\mathcal{P}_1)$$

であたえられる。ここで c_1, c_2 は普遍定数、Scal は田中–ウエブスター接続のスカラー曲率、$A_{11,}{}^{11}$ はトーションの 2 階共変微分, Δ_b はサブラプラシアンである。

3 次元の CR ザイフェルト多様体 (すなわち、CR 構造を保つ S^1 作用を生成するレーブ場が存在する場合) においては Tor が古典的なレイ・シンガー解析的トーションと一致することがルマーンにより示されている。この場合は Tor は位相的な不変量であり、とくに接触不変量でもある。これは上記の接触構造の解析的トーションの定義の妥当性の裏付けである。

第三部では境界付き強擬凸多様体 X の内部 X° の完備アインシュタイン・ケーラー計量 g^{EK} についての体積くりこみを調べた。境界 M には X の複素構造から CR 構造が誘導される。M 上の接触形式 θ を固定し

$$\rho^2 g^{\mathrm{EK}}|_M = \theta^2, \quad |d\log(-\rho)|^2_{g^{\mathrm{EK}}} = 1$$

をみたす M の定義関数 ρ をえらぶ。このとき集合 $X_\varepsilon = \{\varphi < \varepsilon\}$ の体積は

$$c_0\varepsilon^{-n-1} + c_1\varepsilon^{-n} + \cdots + c_n\varepsilon^{-1} + L\log(-\varepsilon) + V + o(1)$$

という展開をもつ。定数項 V を $(X^\circ, g^{\mathrm{EK}})$ の繰り込み体積と定義する。L は M 上の接触形式 θ の局所不変量の積分として表される M の CR 不変量である。第一部で述べたようにこれは接触構造の不変量になる。一方、V は CR 不変量ではなく θ の共形変形に関するアノマリーをもつ (V の θ への依存性を明示し V_θ と書くことにする)。$n=1$ の場合にその表示は次で与えられる。

定理 D. $n=1$ のとき接触形式の共形変形 $\widehat{\theta} = e^{2\Upsilon}\theta$ に関する繰り込み体積のアノマリーは次で与えられる：

$$\begin{aligned} V_{\widehat{\theta}} - V_\theta = \int_M \frac{1}{96}\left(\Delta_b \mathrm{Scal} - 8\mathrm{Im} A_{11,}{}^{11}\right)\Upsilon + \frac{1}{16}\mathrm{Scal}\Upsilon_1\Upsilon^1 \\ - \frac{1}{4}\Big((\Upsilon_1\Upsilon^1)^2 + \mathrm{Im}(\Upsilon_1\Upsilon_1 A^{11}) + \frac{1}{4}(T\Upsilon)^2 \\ - 2\mathrm{Re}(\Upsilon_{11}\Upsilon^1\Upsilon^1) + \Upsilon_1\Upsilon^1\Delta_b\Upsilon\Big)\,\theta\wedge d\theta \end{aligned}$$

ここで、$\Upsilon_1, \Upsilon_{11}$ は Υ の $T^{1,0}M$ 方向の共変微分，レビ計量を用いて添字の上げ下げを行う。

系. $n=1$ とする。g^{EK} の曲率に対する第 k チャーン形式を c_k とするとき、X のオイラー指標は次の表示をもつ：

$$\chi(X) = \int_X \left(c_2 - \frac{1}{3}{c_1}^2\right) + \mathcal{V}(M),$$

ここで

$$\mathcal{V}(M) := \frac{1}{\pi^2}\left(6V - \frac{1}{128}\int_M (\mathrm{Scal})^2 - 16|A|^2\theta\wedge d\theta\right)$$

は M の *CR* 不変量である。

第一部および二部では二つの新しい接触不変量をあたえたが、これらは $n=1$ の場合には恒等的に消える；また高次元では計算が困難である。近年、他の研究者によっても微分幾何学の道具を用いた接触不変量の構成が行われているが、その計算は困難である。(一方、いわゆる接触位相によって定義される接触不変量はより研究が進められており計算も可能である場合が多い。) 微分幾何的な接触不変量は、第一部で調べた接触不変量 L のように、擬エルミート不変量 (θ の曲率) の積分であると予想できる。ここでシンガーの有名な予想を解決するギルキーの定理を思い出す。

定理（ギルキー）．リーマン多様体 (M,g) のある局所スカラー不変量の積分が計量 g によらない大域的不変量 $L(M)$ を与えるとする。このとき $L(M)$ は M のオイラー指標の普遍定数倍である。

とくに奇数次元の多様体上での局所リーマン不変量の積分として表示される位相不変量は自明である。ギルキーの定理の類似として次の問題提起する。

問．局所擬エルミート不変量の積分が接触不変量を与えるとき、この接触不変量は恒等的に消えるのか。

接触構造を固定したとき擬エルミート計量の自由度は制限されるため、ギルキーの不変式論を用いた証明を適用するのは困難である。またギルキーの定理は L が共形不変量であるという仮定では成り立たない；実際、局所共形不変量の積分としてオイラー指標以外の共形不変量がたくさん構成できる。接触構造に付随する擬エルミート計量には概複素構造 J による自由度も含まれるので、問題の解決には、これらの自由度を記述する新しい理論が必要である。これは、接触不変量と擬エルミート幾何学の関係をもっと調べる、十分な動機付けである。

以上