論文の内容の要旨

論文題目：Classification of two dimensional trianguline representations of p-adic fields

（p-進体の二次元三角表現の分類）

氏名：中村　健太郎

この博士論文の主題は、任意の $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 K に対して、二次元三角表現といわれる p-進 $G_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-表現のクラスに関する次の二つを研究することである。

(A) 二次元三角表現と $GL_2(K)$ の局所ラングランズ対応との関係。

(B) 二次元三角表現の分類。

二次元三角表現は、Berger 氏により定義された B-ペアを用いて次のように定義される ([Be07])。$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 E に対して、(G_K の) E-表現を有限次元 E-ベクトル空間 V で G_K が連続 E-線形に作用しているものとする。(G_K の) E-B-ペアを組 $W := (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ で、W_e は有限 $B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群（$B_e := B^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}$）で連続半線形な G_K-作用をもち B_e-加群としては自由、W^+_{dR} は有限 $B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-加群で連続半線形な G_K-作用をもち B^+_{dR}-加群としては自由、そしてある G_K-同変な $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-線形同型 $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_e} W_e \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B^+_{\mathrm{dR}}} W^+_{\mathrm{dR}}$ が与えられているもの、として定義する。関手 $V \mapsto W(V) := (B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ によって、E-表現の圏は E-B-ペアの圏の充満忠実な部分圏となる。二次元 E-表現 V が三角表現であることを $W(V)$ が可約な rank2 の E-B-ペアとなっている表現 V として定義する。(E-B-ペア $W := (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ に対して $\mathrm{rank}W := \frac{1}{[E:\mathbb{Q}_p]}\mathrm{rank}_{B_e} W_e \in \mathbb{N}$ と定義する。) $K = \mathbb{Q}_p$ の場合は、Colmez 氏により二次元三角表現は分類されている ([Co07a])。(彼は B-ペアではなく Robba 環上の (φ, Γ)-加群の理論を用いて分類している。) Colmez 氏はこの分類の結果を用いることによって、三角表現に対する p-進局所ラングランズ対応を具体的に構成した ([Be-Br], [Co04], [Co07b])。さらに、この分類を用いることで任意の法 p 表現の変形空間の中に三角表現に対応する点が密に含まれていることが示されている ([Co07a])。この事実は、三角表現とは限らない一般の二次元表現に対する $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進ラングランズ対応の研究におい

ても非常に重要な役割を果たしている。一方、$\mathbb{Q}_p$ とは限らない一般の p-進体 K においては、最近の Breuil-Paskunas 氏による法 p-ラングランズ対応の研究（[Br-Pa]）をのぞいては、p-進ラングランズ対応に関する研究は今のところおそらく何も知られていないように思われる。そこで、一般の p-進体 K に対して二次元三角表現の分類の研究を行うことは p-進ラングランズ対応の一般化への重要なステップになるだろうと思われるのである。

(A):上のように、二次元三角表現の研究のひとつの目的は p-進ラングランズ対応への応用であるから、まずは二次元三角表現と従来の $GL_2(K)$ の局所ラングランズ対応との関係を研究することは基本的な問題であると思われる。V を任意の二次元潜在的 semi-stable E-表現とする。フィルトレイション付き (φ, N, G_K)-加群を $D_{\mathrm{pst}}(V) := \cup_{L\supseteq K}(B_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$ と定める。Fontaine 氏の方法により、$\bar{D}_{\mathrm{pst}}(V) := D_{\mathrm{pst}}(V)\otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{un}}\otimes E}\bar{K}$(埋め込み $E\hookrightarrow \bar{K}$ を一つ固定しておく）には $\bar{K}$ 上二次元 Weil-Deligne 表現の構造が入る。局所ラングランズ対応により、$\bar{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ の半単純化 $\bar{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{ss}$ に対応する $GL_2(K)$ の既約 smooth admissible 表現 $\pi(\bar{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{ss})$ が定まる。このとき、我々は次のことを証明した。

Theorem -1.1. ([Na, Theorem2.4]) 次は同値。

(1) 有限次拡大 $E'\supseteq E$ が存在して、$V\otimes_E E'$ は三角 E'-表現になる。

(2) $\pi(\bar{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{ss})$ は、*non-supercuspidal* な表現になる。

この結果及び $K=\mathbb{Q}_p$ の場合の研究の結果などから、p-進ラングランズ対応で（潜在的 semi-stable）二次元三角表現に対応すべき $GL_2(K)$ の局所解析的な表現は smooth admissible な主系列表現（と局所代数的な表現とのテンソル積表現）のある種の p-進完備化と関係するであろうことが予想される。

(B):分類は次の手順で行っていく。(1) rank 1 E-B-ペアの分類、(2) $\mathrm{Ext}^1(W_1, W_2)$ の計算 (W_1, W_2 は rank 1 E-B- ペア)、(3) 二次元三角 E-表現 (= rank 2 エタール E-B-ペア) の決定、(4) 二次元潜在的 semi-stable 三角 E-表現の決定。(1) について、我々は次の自然な 1 対 1 対応を構成することができる。$\{\delta : K^\times \to E^\times$ 連続準同型 $\} \xrightarrow{\sim} \{W : \mathrm{rank1}\ E\text{-}B\text{-ペア}\} : \delta \mapsto^{\exists} W(\delta)$ ([Na, Theorem 1.43]) 。(2) は、Liu 氏によるガロアコホモロジーの Tate の双対性定理、Euler-Poincaré 標数公式の B-ペアへの一般化を用いて計算する。(3) は主に、Kedlaya 氏の Robba 環上の (φ,Γ)-加群の slope フィルトレイション分解の定理の B-ペア版を用いて分類する。これらはある slope に関する条件を満たす二つの連続準同型の組 (δ_1,δ_2) とこれから定まるあるパラメーター空間 $S(\delta_1,\delta_2)\setminus S'^{non-\acute{e}t}(\delta_1,\delta_2)$ によって分類される ([Na, Theorem 4.4])。(4) は Bloch-Kato の $\mathrm{H}^1_e, \mathrm{H}^1_f, \mathrm{H}^1_g$、及びそれらと Tate の双対性との関係を B-ペアの場合に一般化することで分類する。これらはある slope に関する条件を満たす $(\delta_1,\delta_2,\{k_\sigma\}_\sigma)$ (ここで、$\delta_1,\delta_2 : K^\times\to E^\times$ は局所的に定数な準同型、任意の埋め込み $\sigma: K\hookrightarrow E$ に対して $k_\sigma\in\mathbb{Z}$) と, これから定まるパラメーター空間 $T^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mathrm{cris}}(\delta_1,\delta_2,\{k_\sigma\}_\sigma)$, $T^{\mathrm{\acute{e}t}}_{\mathrm{st}}(\delta_1,\{k_\sigma\}_\sigma)$ によって分類される（これらはおおよそフィルトレイション付き (φ,N,G_K)- 加群に入る weakly admissible なフィルトレイションのパラメーター空間に対応している。) ([Na, Theorem 5.5], [Na, Theorem 5.8])。$K=\mathbb{Q}_p$ の場合はこれらのパラメーター空間は非常に簡単なもの (空集合、一点集合または $\mathbb{A}^1(E)$) であったが、一般の K に対してはこれらのパラメーター空間ははるかに複雑なものになっている。これらの分類結果及び $K=\mathbb{Q}_p$ の場合の研究の結果などから、(必ずしも潜在的に semi-stable とは限らない) 二次元三角表現に対応すべき $GL_2(K)$ の局所解析的な表現は、局所解析的な二つの指標 $\delta_1,\delta_2 : K^\times\to E^\times$ から得られる局所解析的な意味での $GL_2(K)$ の主系列表現のある種の p-進完備化と関係するであろうことが予想される。これらの p-進完備化の取り方と上記の分類のパラメーター空間との関係を究明していくことが今後の課題である。

References

[Be07] L.Berger, Construction de (φ, Γ)-modules: représentations p-adiques et B-paires, arXiv preprint 0704.1083v2 (2007).

[Be-Br] L.Berger, C.Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, arXiv preprint math/0601545 (2006).

[Br-Pa] C.Breuil, V.Paskunas, Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2, preprint (2007).

[Co04] P.Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, preprint (2004).

[Co07a] P.Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, preprint (2007).

[Co07b] P.Colmez, La série principale unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, preprint (2007).

[Na] K.Nakamura, Classification of two dimensional trianguline representations of p-adic fields, 東京大学博士論文 (2008).