論文の内容の要旨

論文題目　Groups of real analytic diffeomorphisms of the circle with a finite image under the rotation number function
（円周の実解析的微分同相からなる回転数関数による像が有限である群）

氏　名　　松田能文

1885年，H. Poincaré は円周の向きを保つ同相写像の共役不変量である回転数を定義した．彼はこの不変量が多くの力学系的情報を含んでいることを示した．

定理 **(Poincaré)** f を円周の向きを保つ同相写像とする．このとき f の回転数 $\rho(f)$ が有理数であることと f が有限軌道を持つこととは同値である．より詳しく言うと，ある互いに素な整数 p，q に対して $\rho(f)=\frac{p}{q}\mathrm{mod}\mathbf{Z}$ となることと f が q 点からなる軌道を持つこととは同値である．

回転数により，円周の向きを保つ同相写像全体のなす群 $\mathrm{Homeo}_+(\mathrm{S}^1)$ から $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への写像が定義されるが，これを回転数関数と呼ぶことにする．この写像は，$\mathrm{Homeo}_+(\mathrm{S}^1)$ の各元 f と各整数 $n\in\mathbf{Z}$ に対して $\rho(f^n)=n\rho(f)$ であるという意味で “斉次” であるが，準同型ではない．

我々は，$\mathrm{Homeo}_+(\mathrm{S}^1)$ の部分群の上での回転数関数の振る舞いおよびその力学系との関係に興味がある．上記の Poincaré の定理より，$\mathrm{Homeo}_+(\mathrm{S}^1)$ の部分群が有限軌道を持つならば回転数関数による像が有限であることが従う．よって，$\mathrm{Homeo}_+(\mathrm{S}^1)$ の各部分群 Γ に対して，以下のうちの唯一つが成立する．

(i) Γ は有限軌道を持つ．

(ii) Γ は回転数関数による像が無限である．

(iii) Γ は回転数関数による像が有限であり，有限軌道を持たない．

上記の定理により，Γ が巡回群であるときには (iii) は起こらない．しかし，たとえ Γ が円周の向きを保つ実解析的微分同相全体のなす群 $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であると仮定しても (iii) を満たすものは存在する．そのような部分群の典型的な例は，有限生成かつ非初等的な Fuchs 群である (命題 5.1)．

この論文の目的は，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であって回転数関数による像が有限であり有限軌道を持たないものに対する制約条件を与えることである．例えば，そのような部分群は円周上のどの確率測度も保たないことを示すことができる (命題 2.4)．

我々の研究の動機の一つは，Fuchs 群の理論の中にある．上半平面の理想境界と円周を同一視することにより，$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ を $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群と見なす．T. Jørgensen の結果を用いることにより，$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ の部分群であって回転数関数による像が有限であり有限軌道を持たないものは $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ の離散部分群であることが証明できる (命題 5.1)．この事実により，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の非離散的な部分群を研究することが動機付けられる．

非離散的な部分群を考えるには，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ に位相を与える必要がある．この論文では，C^1-位相を考えるが，その理由は以下で明らかになる．

E. Ghys は，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の非可解な部分群であって恒等写像に十分近い元で生成されるものは C^{∞}-位相に関して非離散的であることを示した．そこで，恒等写像に近い元で生成される部分群の二つの性質を思い出しておく．

一つは，そのような部分群であって有限軌道を持たないものについては全ての軌道が稠密になるという G. Duminy の未出版の結果である．実は，この結果は C^2-微分同相写像のなす群に対するものであり，その証明が一般的な仮定を付加した下で A. Navas により再構成されている．

もう一つは，そのような部分群の元の列の一種の “極限” といえる局所ベクトル場が存在するという J. Rebelo の結果である．彼の議論は，複素平面上の局所正則微分同相の原点での芽のなす群に関する中居の結果に基づいている．

これら二つの性質は，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であって C^1-位相に関して非離散的なものに引き継がれる (命題 3.2，3.9)．これが，C^1-位相を考える理由である．これらの性質を利用して，以下のような主結果を示す．

定理 1.1 Γ を $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であって C^1-位相に関して非離散的なものとする．このとき Γ の回転数関数による像が有限であることと Γ が有限軌道を持つこととは同値である．

この結果を用いて，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であって回転数関数による像が有限であり有限軌道を持たないものに対する代数的な制約条件を導き出す．G. Margulis の結果によれば，$\mathrm{Homeo}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の各部分群は，円周上のある確率測度を保つかあるいは非可換自由部分群を含んでいる．したがって，$\mathrm{Homeo}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であって回転数関数による像が有限であり有限軌道を持たないものは非可換自由部分群を含んでいる．ここで $\mathrm{Homeo}_{+}(\mathrm{S}^1)$ を $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ に置き

換えると，定理 1.1 を適用することにより，以下のようなより強い代数的な制約条件が得られる．

系 **1.2** Γ を $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の部分群であって回転数関数による像が有限であり有限軌道を持たないものとする．このとき，以下のことが成り立つ．

(i) Γ は C^1-位相に関して離散的である．

(ii) Γ の各部分群 Γ' に対して，以下のいずれかが成立する．

- *(a)* Γ' は有限群である．
- *(b)* Γ' は有限指数の無限巡回部分群を含んでいる．
- *(c)* Γ' は非可換自由部分群を含んでいる．

双曲群に対して，上の系の (ii) と同様の主張が成立することが知られている．したがって，$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ の有限生成部分群であって回転数関数による像が有限であり有限軌道を持たないものは双曲群であるかどうかを知ることは興味深いであろう．

我々は，定理 1.1 及び系 1.2 は $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(\mathrm{S}^1)$ を円周の向きを保つ C^{∞}-微分同相全体のなす群 $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathrm{S}^1)$ に置き換えると成立しないことも示す (注意 4.4)．