

論文審査の結果の要旨

氏名 松田能文

円周の微分同相は、天体力学との関連で力学系の記述のために20世紀初頭に研究が始まっているが、それらのなす円周の微分同相群については、近年、余次元1葉層構造論と関係する群作用の定性的理論、群の幾何的理論、ループ群の理論などで多くの研究がなされている。

論文提出者松田能文が対象としているのは、円周の微分同相のなす群と回転数関数による像の関係である。回転数 ρ は円周の向きを保つ同相に対して、ポアンカレにより120年前に与えられたものである。円周の同相 h に対して、 $\rho(h)$ は \mathbf{R}/\mathbf{Z} に値を持ち h の平均的な回転の量を与えるものであるが、特にその値が有理数 $\bmod \mathbf{Z}$ であれば、 h に周期軌道があることを示している。また、 ρ は円周の向きを保つ同相群 $\text{Homeo}_+(S^1)$ 上の連続関数である。円周の微分同相のなす群 Γ に対して、 \mathbf{R}/\mathbf{Z} の部分集合 $\rho(\Gamma) = \{\rho(h) \mid h \in \Gamma\}$ を考えると、 Γ が有限軌道を持てば、すなわち、円周の点で Γ による軌道が有限集合となるものがあれば、回転数関数による像 $\rho(\Gamma)$ が有限集合であることはすぐに分かる。一方、 $\rho(\Gamma)$ が有限集合であるが、有限軌道を持たない例はフックス群などに存在している。論文提出者が研究したのはそのような Γ が円周の微分同相群の離散部分群となりうるかどうかである。円周の微分同相群に含まれる $PSL(2; \mathbf{R})$ の部分群に対しては、ユルゲンセンの結果から、 $\rho(\Gamma)$ が有限集合であり、 Γ が有限軌道を持たないならば、 Γ は $PSL(2; \mathbf{R})$ の離散部分群すなわちフックス群であることが分かる。

論文提出者松田能文は、離散部分群という性質に着目し、ユルゲンセンの結果を円周の向きを保つ実解析的微分同相群 $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ に拡張する次の定理を示した。

定理。 Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって C^1 -位相に関して非離散的なものとする。このとき Γ の回転数関数による像 $\rho(\Gamma)$ が有限であることと Γ が有限軌道を持つことは同値である。

このことから、回転数関数による像 $\rho(\Gamma)$ が有限であり、有限軌道を持たないような実解析的微分同相からなる群の重要な分類定理が得られる。

定理。 Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって回転数関数による像が有限であり、有限軌道を持たないものとする。まず(i) Γ は C^1 -位相に関して離散的であり、さらに(ii) Γ の部分群は(a)有限群、(b)有限指数の無限巡回部分群を含む群、(c)非可換自由部分群を含む群のいずれかとなる。

この性質(a)、(b)、(c)は、幾何学的群論で研究されている双曲群に対して知られているものであり、非常に興味深い結果である。

リー群の離散部分群についての研究は、近年、小林俊行の研究などにより大きく発展をしている。微分同相群の中の離散部分群は重要な研究対象であるが、これまでには、デュミニ、ジスによる微分同相群の恒等写像に近い元で生成される群についての非離散性の研究、中居、レベロによる非離散群の元の列の局所的な収束の研究など、部分的な研究が行われていただけであった。論文提出者の結果は、微分同相群の中の離散部分群についての初めての結果と考えられる。

さらに、論文提出者は、上の定理は、 $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ を、円周の向きを保つ C^∞ 級微分同相群 $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ に置き換えると成立しないことを第2種フックス群とその極小集合の補集合に台を持つフローを用いて実例を構成し示している。

定理の証明は、非離散性、 $\rho(\Gamma)$ の有限性を仮定して、 Γ の元の列で固定点を持たず、局所的に固定点を持つ微分同相に収束するものの存在を示すことでなされる。そのために、論文提出者は、中居、レベロの結果と同様な結果、すなわち、非離散的ならば局所的には極限を含むフローが構成できることをこの仮定の下で証明して用いている。これは、無限次元リー群である実解析的微分同相群とそのリー環すなわち、円周上の実解析的ベクトル場のなすリー環の対応を考えると、非離散性から存在が期待されるリー環の元が局所的に存在することを示しているもので、これからの微分同相群の離散部分群、非離散部分群の研究において基本的な結果である。

このように、論文提出者の結果は微分同相群の離散部分群の研究を創始する重要な意味を持つものである。よって論文提出者 松田能文は、博士（数理学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。