論文の内容の要旨

論文題目　Higher order shuffle regularization and multiple polylogarithms
（高次シャッフル正則化と多重ポリログ）

氏　　名　　Zhonghua Li (李 忠華)

正整数の列 $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対し, 多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ を次の級数で定める.

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}. \tag{1}$$

この時, 多重ポリログには次のような反復積分表示があることが知られている.

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=\int_0^z\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\frac{dt}{1-t}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\frac{dt}{1-t}\cdots\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\frac{dt}{1-t}. \tag{2}$$

ここで, 反復積分とは次で定義されるものである.

$$\int_0^z f_1(t)dtf_2(t)dt\cdots f_m(t)dt=\int_{z>t_1>\cdots>t_m>0}f_1(t_1)\cdots f_m(t_m)dt_1\cdots dt_m.$$

$k_1>1$ ならば $z\to1$ のとき多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ に収束する

$$\lim_{z\to1}\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=\zeta(\mathbf{k})=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}} \tag{3}$$

$$=\int_0^1\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\frac{dt}{1-t}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\frac{dt}{1-t}\cdots\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\frac{dt}{1-t}. \tag{4}$$

ここで, $\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k_1+k_2+\cdots+k_n$ を $\mathbf{k}$ の重さ (weight) といい, $k_1>1$ となる時, $\mathbf{k}$ を収束インデックス (admissible index) という.

多重ゼータ値の積は, 級数表示 (3), または反復積分表示 (4) を使うことにより二通りの方法で多重ゼータ値の和として書き表される. その二つを等しいと

おいて得られる関係式を複シャッフル関係式と呼ぶ. この関係式により多くの関係式が得られるが, 多重ゼータ値の全ての $\mathbb{Q}$ 関係式が複シャッフル関係式から得られるわけではなく. それらから得られないものとしては, $\zeta(3)=\zeta(2,1)$ 等の例がある.

多重ゼータ値の全ての $\mathbb{Q}$ 関係式を調べるためには, 二通りの正則化:調和シャッフル正則化とシャッフル正則化によって導びかれる "正則化された複シャッフル関係式" を考えなくてはならない. この様な正則化された複シャッフル関係式まで含めて考えれば, 多重ゼータ値のすべての $\mathbb{Q}$ 関係式が得られると予想されている.(詳しくは [1] を参照)

シャッフル正則化は多重ポリログを用いて定まる発散多重ゼータ値の正則化である. $\mathbf{k}$ を正整数の列とすると, ある $J>0$ が存在して

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=P_{\mathbf{k}}(-\log(1-z))+O((1-z)\log^{J}(1-z)),\quad z\to 1, \tag{5}$$

と書ける. ここで, $P_{\mathbf{k}}(T)\in\mathbb{R}[T]$ をシャッフル正則化という. この論文では (5) の中での "O" 部分を精密に与えた.

定理 1. $\mathbf{k}$ を任意の正整数の列とする. このときある多項式 $P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)\in\mathbb{R}[T]$ が存在して

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}P_{\mathbf{k}}^{(i)}(-\log(1-z))(1-z)^{i} \tag{6}$$

と書ける. ここで, $P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)$ は次の様に書ける.

(a) $\mathbf{k}$ を $\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{m},\mathbf{k}')(\mathbf{k}'=(k_1,\ldots,k_n)$ は収束インデックス) と書く. この m を用いて $P_{\mathbf{k}}^{(0)}(T)=\sum_{j=0}^{m}P_{\mathbf{k}}^{(0j)}T^{j}$, ただし $P_{\mathbf{k}}^{(0j)}$ は

$$P_{\mathbf{k}}^{(0j)}=\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k}'')=\mathrm{wt}(\mathbf{k})-j\\ \mathbf{k}'':\text{収束}}}\beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'',j}\zeta(\mathbf{k}''), \tag{7}$$

と書ける. ここで, $\beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'',j}\in\mathbb{Q}$ である. また $P_{\mathbf{k}}^{(0m)}=\frac{\zeta(\mathbf{k}')}{m!}$ が成り立つ.

(b) 任意の $i>0$ に対して, $P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)=\sum_{j=0}^{n}P_{\mathbf{k}}^{(ij)}T^{j}$, $P_{\mathbf{k}}^{(ij)}$ は以下の様に書ける

$$P_{\mathbf{k}}^{(ij)}=\sum_{\substack{a+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{(1)})+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^{(2)})=\mathrm{wt}(\mathbf{k})-j\\ a>0,\mathbf{k}^{(2)}:\text{収束}}}\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{k}^{(1)},\mathbf{k}^{(2)},a,j}\frac{1}{i^{a}}\zeta_{i}(\mathbf{k}^{(1)})\zeta(\mathbf{k}^{(2)}), \tag{8}$$

ここで, $\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{k}^{(1)},\mathbf{k}^{(2)},a,j}\in\mathbb{Q}$ である.

また, $\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{k}^{(1)},\mathbf{k}^{(2)},a,j}$ と $\beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'',j}$ はある種の漸化式を満たす (論文 (3.6) – (3.9) を参照). $P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)$ を高次シャッフル正則化という.

上の (8) 中の $\zeta_i(\mathbf{k}^{(1)})$ は多重ゼータ部分和, すなわち正整数の列 $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対して,

$$\zeta_i(\mathbf{k})=\sum_{i>m_1>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}\in\mathbf{Q} \tag{9}$$

と定まるものである.

形式級数 $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z,T)\in\mathbb{R}[T][[1-z]]$ を

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z,T)=\sum_{i=0}^{\infty}P_{\mathbf{k}}^{(i)}(T)(1-z)^i \tag{10}$$

と定義する. 正整数の列 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ に対して, 多重ポリログのシャッフル積により

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{k}'}(z)=\sum_{\mathbf{k}''}c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}\,\mathrm{Li}_{\mathbf{k}''}(z) \tag{11}$$

を満たす $c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}\in\mathbb{Z}$ が存在する. このとき, 対数関数のモノドロミーを使って, 下の定理が示される.

定理 2. (11) の $c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}$ を用いて,

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z,T)\,\mathrm{Li}_{\mathbf{k}'}(z,T)=\sum_{\mathbf{k}''}c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}\,\mathrm{Li}_{\mathbf{k}''}(z,T) \tag{12}$$

なる関係式が成り立つ.

(12) の両辺の T と $1-z$ の冪の係数を比較して, 多重ゼータ値のある種の関係式が得られる. この種の関係式を高次正則化シャッフル関係式という.

さらにこの論文では定理 2 を次の様に一般化した (定理 3). $A=\{e_0,e_1\}$, e_0 と e_1 は非可換二変数として, $\mathbb{C}\langle\langle A\rangle\rangle$ を二変数非可換形式冪級数環とする. このとき, $\mathbb{C}\langle\langle A\rangle\rangle$ は以下の余積 Δ により, Hopf 代数になる

$$\Delta(e_i)=e_i\otimes 1+1\otimes e_i,\quad i=0,1. \tag{13}$$

集合 $\mathbf{Shuffle}(\mathbb{C})$ を次の 2 つの条件を満たす元 $\Phi(e_0,e_1)\in\mathbb{C}\langle\langle A\rangle\rangle$ の全体と定義する

(i) $\Phi(e_0,0)=\Phi(0,e_1)=1$,

(ii) $\Delta\Phi=\Phi\otimes\Phi$.

明らかに, アンシエータの集合 ([2] を参照) は $\mathbf{Shuffle}(\mathbb{C})$ に含まれる.

任意の $\Phi(e_0,e_1)\in\mathbf{Shuffle}(\mathbb{C})$, 任意の収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対して, Φ に関連する多重ゼータ値 $\zeta_\Phi(\mathbf{k})$ を

$$\zeta_\Phi(\mathbf{k})=(-1)^n(\Phi\text{の }e_0^{k_1-1}e_1e_0^{k_2-1}e_1\cdots e_0^{k_n-1}e_1\text{の係数}). \tag{14}$$

と定義する. このとき, 定理 1 の式 (7) と (8) の中の $\zeta(\mathbf{k}'')$ を $\zeta_\Phi(\mathbf{k}'')$, $\zeta(\mathbf{k}^{(2)})$ を $\zeta_\Phi(\mathbf{k}^{(2)})$ におき換えると, Φ に関連する多重ポリログ (実は形式級数)$\mathrm{Li}_{\Phi,\mathbf{k}}(z)\in\mathbb{C}[[1-z]][\log(1-z)]$ が定義できる. この時次の定理が示される.

定理 3. (11) の $c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}$ を用いて,

$$\mathrm{Li}_{\Phi,\mathbf{k}}(z)\,\mathrm{Li}_{\Phi,\mathbf{k}'}(z) = \sum_{\mathbf{k}''} c_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}''}\,\mathrm{Li}_{\Phi,\mathbf{k}''}(z) \tag{15}$$

が成り立つ.

式 (15) から Φ に関連する多重ゼータ値のある種の関係式が得られる. この種の関係式を Φ に関連する高次正則化シャッフル関係式という.

定理 3 の証明のアウトラインを以下述べることにする. まず Φ に関連する多重ポリログの母関数 $G_0^{\Phi}(z) \in \mathbb{C}[[1-z]][\log(1-z)]\langle\langle A\rangle\rangle$ を考える. x_0 と x_1 は非可換二変数として, 任意の x_0 と x_1 の文字 $w = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$ に対して, $e_w = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}$ とおく. このとき, $G_0^{\Phi}(z)$ は

$$G_0^{\Phi}(z) = \sum_{w:x_0\,\text{と}\,x_1\,\text{の文字}} c_w e_w \tag{16}$$

と書ける. ただし, $c_1 = 1$. $w = x_0^{k_1-1}x_1\cdots x_0^{k_n-1}x_1$ のときは,

$$c_w = (-1)^n\,\mathrm{Li}_{\Phi,k_1,\ldots,k_n}(z) \tag{17}$$

に定め, それらの $\mathbb{Q}$ 一次結合については線形に拡張しておく. 一般の w は $w = \sum_{i=0}^{m} w_i \sqcup\!\sqcup\, x_0^{\sqcup\!\sqcup i}$, w_i は x_1 で終る語の文字の $\mathbb{Q}$ 結合, という形に書けることがわかる. このとき, c_w は

$$c_w = \sum_{i=0}^{m} c_{w_i}(\log z)^i \tag{18}$$

によって定める.

Φ が Drinfeld のアンシエータのとき, $G_0^{\Phi}(z)$ は多重ポリログの母関数 $G_0(z)$ となる. この $G_0(z)$ は Knizhnik-Zamolodchikov 方程式

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)G(z) \tag{19}$$

の次の漸近条件をみたす唯一の解析解となる

$$G_0(z) \sim z^{e_0}, \quad z \to 0. \tag{20}$$

この論文では $G_0^{\Phi}(z)$ に対しても Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (19) が満たされることを示した. このことを用いて, 次の定理を示した.

定理 3'. 任意の $\Phi \in \mathbf{Shuffle}(\mathbb{C})$ に対して, $G_0^{\Phi}(z)$ は群的元である. 言い換えれば,

$$\Delta G_0^{\Phi}(z) = G_0^{\Phi}(z) \otimes G_0^{\Phi}(z) \tag{21}$$

である.

一般に $G_0^{\Phi}(z)$ が群的元であることと $G_0^{\Phi}(z)$ の係数がシャッフル関係式を満たすことは同値であるので, これから定理 3 が従う.

参考文献

[1] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値および多重 L 値ノート.

[2] P. Deligne, T. Terasoma, Harmonic shuffle relation for associators, preprint, 2005.