論文審査の結果の要旨

氏名　　李　忠華

李君は修士において、多重ゼータ値の和に関する研究を行っており「高さを固定した多重ゼータ値の和について」という題目で修士で得られた結果の一般化を出版しました。博士課程では多重ゼータ値の関係式に関する研究をさらにすすました。具体的には、これまでに知られている正規化シャッフル関係式をさらに精密化した高次の正規化シャッフル関係式について研究を行い、そこで得られた結果を論文「多重対数関数と高次シャッフル関係式」にまとめ博士論文として提出しました。

様々な指数の間に成り立つ多重ゼータ値の間の関係式は近年盛んに研究されており、様々な結果が得られています。なかでも多重ゼータ値の積分表示より得られるシャッフル関係式および級数表示により得られる調和シャッフル関係式は多重ゼータ値の一連の関係式を与え強力な道具であると信じられています。これらのシャッフル関係式に関しては収束する多重ゼータのみを考えるのではなく、発散する多重ゼータを対数関数の多項式によりその発散を近似することにより得られる、正規化という操作を考えることにより、より豊富な関係式が得られることが井原一金子一Zagier及び、少し違う定式化によりRacinetにより研究されています。正規化の操作は積分シャッフル関係式、級数シャッフル関係式の両方について考えられるますが、李君の着目した点は積分シャッフル関係式の方です。もともとの正規化というプロセスは多重対数関数を対数関数の多項式として近似する操作ですが、これをさらに精密に収束冪級数係数の対数関数の多項式として展開することを考えそれに対するシャッフル関係式を考えました。以下これをここでは（テーラー＋対数）展開と呼ぶことにします。多重対数関数に対して成り立つ微分方程式をもとにその（テーラー＋対数）展開を帰納法的に決まってくる明示的な形で求めました。そこから得られるシャッフル関係式が高次正規化シャッフル関係式と呼ばれるものです。ここで多重対数関数の（テーラー＋対数）展開において随所に特徴的に現れるものとして有限の多重ゼータ和とよばれる有理数です。この明示的表示から、実際（テーラー＋対数）展開の係数はすべて多重ゼータ値の有理数を係数とした一次結合で表されることが結論付けされます。

さらに博士論文の後半部分ではそれらの関係式が本質的に古典的なシャッフル関係式から導かれることを示しました。これに関しては形式的非可換冪級数を用いた定式化がより簡明なので、博士論文ではその形で結果をのべ、証明もその線に基づいてなされています。まず２文字の語でインデックス付けされた古典的シャッフル関係式を満たす数列の母関数を考る。さらにそれが群的元であると仮定する。このときその係数を用いて（テーラー＋多重）展開を多重対数関数の類似として構成しました。李君はその関数の列がシャッフル関係式を

満たすことを示しました。これは各展開係数で見れば、高次正規化シャッフル関係式を満たしている事になります。

その証明については形式的な母関数が形式的な微分方程式を満たすことをみる方針で行うのですが、ここで計算のキーとして使われている方法がホフマンのシャッフル代数における対数関数による展開の類似物を用いる方法です。この手法はもともとの井原一金子一 Zagier の正規化シャッフル関係式においても有効に用いられたものです。

また李氏は上記の博士論文や修士論文の拡張に関する仕事、以外に多重ゼータ関数の q 類似に関する研究、正規化双シャッフル関係式から導かれるガンマ関数、ベータ関数の関係式に関しての研究を論文としてまとめ、参考論文として提出しています。以上の一連の仕事には専門家の立場からみてその技量が十分に認められるものであり、従って李忠華氏は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分の資格があると認める。