# 論文の内容の要旨

論文題目: A variational problem associated with the minimal speed of travelling waves for spatially periodic reaction-diffusion equations

(空間周期的な反応拡散方程式の進行波の最小速度に対する変分問題)

氏名：林　小涛（リン　ショウトウ）(Lin Xiaotao)

反応拡散方程式系の進行波解は物理学、数理生態学などに現れる多様な現象を理論的に理解するために重要な役割を果たしてきた．典型的な方程式は

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0$$

である．解 $u(x,t)$ が $U(x-ct)$ の形で表されるとき、これを定常進行波という．ここで $c$ は定数であり、進行波の速度を表す．$f(u)$ が二つの零点（すなわち空間的に一様な定常状態）を持ち、そのうち一つのみが安定であるとき、方程式は単安定型方程式と言われる．単安定型反応拡散方程式の場合、安定状態と不安定状態を結ぶ進行波の存在について古くから研究があり、ある臨界定数 $c^*$ より大きい任意の $c$ に対して、速度 $c$ の進行波解は存在し、$c^*$ より小さい速度の進行波解は存在しないことが知られている．現実の世界には、均質の環境だけではなく、空間的に不均質の環境も多い．従って、空間的に非一様な係数をもつ方程式を考える必要性があり、最近次第に研究が盛んになりつつある．反応項が空間的に非一様であれば、方程式は $u_t = u_{xx} + f(x,u)$ の形になる．この場合、通常の定常進行波は存在し得ないので、進行波の概念を拡張しておく必要がある．特に $f(x,u)$ が $x$ について周期的な場合は、「周期進行波」というものを考えることになる．これは、ある $T>0$ に対して、$u(x,t+T) \equiv u(x-L,t)$ を満たす解である．(ここで $L$ は $f$ の空間周期.) このとき、$c := L/T$ を進行波の平均速度、または単に速度という．定常進行波の結論と同じく、周期的な進行波の最小速度が存在することが知られている．

周期進行波の速度が $f(x,u)$ にどう依存するかは重要な問題である．反応項が滑らかな場合、ある種の線形化固有値問題を用いて最小速度が特徴づけられることは Weinberger、Berestycki など数学者の研究によって明らかにされた．本論文では次の方程式を考える

$$u_t = u_{xx} + b(x)u(1-u), \ \ x \in \mathbb{R},$$

ここで、$b(x)$ は、与えられた定数 $\alpha > 0, L > 0$ に対して、次の条件を満たす．

$$b(x) \geq 0, \ \ b(x) \equiv b(x+L), \ \ \int_0^L b(x)dx = \alpha L. \tag{1}$$

$b$ が滑らかな場合、

$$c^*(b) = \min\{c > 0\,;\, \exists \lambda > 0 \text{ such that } \mu(c,\lambda) = 0\},$$

ここ $\mu(c,\lambda)$ は線形作用素

$$P\psi := -\psi'' + 2\lambda\psi' - (\lambda^2 - \lambda c + b(x))\psi$$

の主固有値である．ただし、$\psi$ には周期条件 $\psi(x+L) \equiv \psi(x)$ を課すものとする．

本論文では、上記の条件を満たす方程式の最小速度 $c^*(b)$ の有界性を証明し、周期的に並んだ Dirac の delta 関数 $h = \alpha L \sum_k \delta(x-kL)$ が最小速度を最大にすることを明らかにした． 即ち、次式を証明した．

$$c^*(h) = \sup_{b\in\Lambda(\alpha)} c^*(b) = \max_{b\in\overline{\Lambda}(\alpha)} c^*(b)$$

ここで、$\Lambda(\alpha)$ は (1) をみたす滑らかな $b$ の全体で、 $\overline{\Lambda}(\alpha)$ は (1) をみたす測度 $b$ の全体である．特に、$b$ が滑らかな場合、$c^*(h) > c^*(b)$ が成り立つので、$c^*(b)$ の最大値は滑らかな関数によって達成されないことが分かる．

以下, 本論文の主要結果を節ごとに分けて述べる．

- 第一節で反応拡散方程式を導入．周期的進行波解を定義して、方程式の反応項が満たす条件を説明した．最小速度の特徴づける線形固有値問題を導入．本論文の結果を説明した．

- 第二節で必要な用語と主定理を述べた．主定理の内容は上記の条件を満たす滑らかな $b$ に対する $c^*(b)$ が有界であること、更に、$h = \alpha L \sum_k \delta(x-kL)$ に対応する最小速度が $c^*(b)$ の最大値を達成することである．

- 第三節で、$b$ が測度の場合に、方程式の適切性を議論した．解の存在性、唯一性及び初期値に連続的に依存することを証明．

- 第四節で、ある線形固有値問題で特徴づけられる値 $c_e^*(b)$ を導入．係数 $b$ が滑らかな場合は、すでに述べたように $c^*(b) = c_e^*(b)$ となることが知られている．本節では、まず、$b$ が測度の場合に、$c_e^*(b)$ が有界であることを示し、次に、 $c_e^*(h) = \max\{c_e^*(b)\}$ も証明した．

- 第五節で、測度 $b$ に対する最小速度 $c^*(b)$ の存在性を証明． $c^*(b) = c_e^*(b)$ を証明．

- 第六節では、第三節と第五節で用いた解の一様同等連続性の補題を証明．