論文審査の結果の要旨

氏 名 林 小涛

論文提出者 林 小涛 は，空間周期的な媒質中の進行波の速度に関わる変分問題を考察し，進行波の速度を最大化する係数の決定に成功した．その結果，最良係数は関数のクラスには属さず，ある種の測度になることが明らかになった．

反応拡散方程式系の進行波解は，物理学や数理生態学などに現れる多様な現象を理論的に解明するために重要な役割を果たしてきた．典型的な方程式は

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

である．解 $u(x,t)$ が $U(x-ct)$ という形で表されるとき，これを定常進行波という．ここで c は定数であり，進行波の速度を表す．$f(u)$ が二つの零点（すなわち空間的に一様な定常状態）を持ち，そのうち一つのみが安定であるとき，方程式は単安定型方程式と言われる．単安定型反応拡散方程式の場合，安定状態と不安定状態を結ぶ進行波の存在について古くから研究があり，ある臨界定数 c^* より大きい任意の c に対して速度 c の進行波解は存在し，c^* より小さい速度の進行波解は存在しないことが知られている．

現実の世界では，環境は必ずしも均質ではなく，空間的に不均質の環境も多い．従って，空間的に非一様な係数をもつ方程式を考える必要がある．たとえば反応項が空間的に非一様であれば，方程式は $u_t = u_{xx} + f(x,u)$ の形になる．この場合，通常の定常進行波は存在し得ないので，進行波の概念を拡張しておく必要がある．とくに $f(x,u)$ が x について周期的な場合は,「周期進行波」を考えることになる．これは，ある $T > 0$ に対して，$u(x, t+T) \equiv u(x-L, t)$ を満たす解である.（ここで L は f の空間周期.）このとき，$c := L/T$ を進行波の平均速度，または単に速度という．定常進行波の結論と同じく，周期的な進行波の最小速度が存在することが知られている．

周期進行波の速度が $f(x,u)$ にどう依存するかは重要な問題である．反応項が滑らかな場合は，ある種の線形化固有値問題を用いて最小速度が特徴づけられることが予想される．実際，この予想に基づき，外来生物の侵入速度に関する数理生態学上の先駆的な研究が重定-川崎-寺本 (1987) によってなされた．また，Weinberger や Berestycki-Hamel らの研究 (2002) で，最小速度の固有値による特徴付けが理論的に正しいことが証明されている．

本申請論文では次の方程式を扱った.

$$u_t = u_{xx} + b(x)u(1-u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで $b(x)$ は,与えられた定数 $\alpha > 0, L > 0$ に対して次の条件を満たす関数または測度である.

$$(*) \qquad b(x) \geq 0, \quad b(x) \equiv b(x+L), \quad \int_0^L b(x)dx = \alpha L.$$

係数 $b(x)$ が滑らかな場合は,上記の Weinberger および Berestycki-Hamel の結果により,次式が成り立つ.

$$(**) \qquad c^*(b) = \min\{c > 0\,;\, \exists\lambda > 0 \text{ such that } \mu(c,\lambda) = 0\},$$

ここで $\mu(c,\lambda)$ は線形作用素

$$P\psi := -\psi'' + 2\lambda\psi' - (\lambda^2 - \lambda c + b(x))\psi$$

の主固有値である.ただし,ψ には周期条件 $\psi(x+L) \equiv \psi(x)$ を課すものとする.

論文提出者は,上記の関係式 $(**)$ が b が滑らかな関数でなく空間周期性をもつ測度の場合にも成り立つことを示し,さらに,最小速度 $c^*(b)$ を条件 $(*)$ の下で最大化する変分問題

$$\underset{b}{\text{Maximize}}\ c^*(b)$$

を考察した.ここで,b は条件 $(*)$ をみたす測度の全体を動く.そして,上記の最大値が,周期的に並んだ Dirac の delta 関数 $h = \alpha L \sum_k \delta(x - kL)$ によって達成されること,および b が滑らかな関数の場合には決して最大値が達成されないことを明らかにした.詳しくは,次式を証明した.

$$c^*(h) = \sup_{b \in \Lambda(\alpha)} c^*(b) = \max_{b \in \overline{\Lambda}(\alpha)} c^*(b)$$

ここで,$\Lambda(\alpha)$ は $(*)$ をみたす滑らかな b の全体で,$\overline{\Lambda}(\alpha)$ は $(*)$ をみたす測度 b の全体である.

論文提出者の研究は,数理生態学などへの応用面から興味深いだけでなく,周期進行波の理論を係数が特異性を有する方程式のクラスに広げるものであり,反応拡散系の研究に新しい展開を与えたものとして高く評価できる.

以上の諸点を考慮した結果,論文提出者 林 小涛 は,博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.