論文の内容の要旨
Proper Actions of $SL(2,\mathbb{R})$ on Irreducible Complex Symmetric Spaces
(既約な複素対称空間における$SL(2,\mathbb{R})$の固有な作用)

手塚 勝貴

1 序

博士論文では、フックス群やクライン群のようなやや大きい離散群を基本群とするような局所対称空間がどの位存在するかをテーマとする。リーマン幾何の枠組みを超えた場合

局所対称空間の基本群にはどの様な制約があるか？

という問題は非常に困難な問題である [8, 13]。

無限位数の基本群をもつ完備な局所対称空間が存在するための必要十分条件は1989年に小林によって解明された [4]。

一方、コンパクト形の存在問題、すなわち余コンパクトな不連続群が存在するかどうかという問題は、リーマン対称空間に対しては1950年代から1960年代初頭にSiegel、Borelによって代数群を用いた手法で肯定的に解決され、非リーマン対称空間に対しては小林、Zimmer、Margulis等によって、不連続群論からエルゴード理論やユニタリ表現論にまたがる手法を用いた新しい研究の潮流が生まれている [1, 6, 7, 10, 11, 12, 15]。

博士論文では、この中間に相当するフックス群やクライン群の非リーマン対称空間（特に複素対称空間）への不連続な作用に絞って研究を行った。

まずは、知られている事を復習しよう。

Gを半単純リー群として、HをGにおいて簡約な閉部分群とする。特に興味深いのは、Hがコンパクトでない場合である。その時、Killing形式から導かれるG/H上の擬リーマン計量を考えると、GはG/Hに等長に作用する。半単純対称空間が古典的な例である。

ΓをGの離散部分群としよう。その時、Γは擬リーマン多様体G/Hの等長変換から成る離散部分群と見なせるがΓは必ずしも不連続群として作用する訳ではない。実際、G/Hの無限不連続群が存在しないという現象は最初、E.CalabiとL.Markus(1962)によって、正の定曲率を持つローレンツ対称空間で発見され[2]、カラビ・マルクス現象と呼ばれている。小林(1989)により、その必要十分条件が一般に解明された[4]。

Fact 1.1. (カラビ・マルクス現象の必要十分条件[4];)
簡約型等質空間に対する次の*2*つの条件は同値である。

(1) G/Hに無限不連続群が存在する。

(2) $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G > \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} H$.

(2) $\Rightarrow$ (1)の証明が非自明であり、それは(2) $\Rightarrow$ **条件**S $\Rightarrow$ (1)の形で示されている。ここで**条件**Sは次の形で述べられる。

条件S: Gの半単純元γで、$\Gamma := \langle\gamma\rangle$が$G/H$に固有不連続に作用するものが存在する。

博士論文では、**条件**Sのかわりに

条件N: Gのベキ零元γで、$\Gamma := \langle\gamma\rangle$が$G/H$に固有不連続に作用するものが存在する。

が、どの様な等質空間に対して成り立つかを考察した。

条件Nでは一見、可換自由群$\mathbb{Z}$のG/Hへの作用だけを考えている様に思われるが、実は$SL(2,\mathbb{Z})$の様な非可換な離散群の作用の固有不連続性も考えている事になる（定理A）。これを連続化した**条件**SLがいつ成り立つかも同時に考察する。

条件 SL: $SL(2,\mathbb{R})$ と局所同型な G の部分群 L で G/H に固有に作用するものが存在する。

博士論文では、まず次の定理を証明した。

定理 A. 条件 $N\Leftrightarrow$ 条件 SL

定理 A で述べた同値な条件が成り立つ様な等質空間 G/H に対しては、$SL(2,\mathbb{R})$ の任意の離散部分群（例えば $SL(2,\mathbb{Z})$）が G/H に固有不連続に作用する。

博士論文では、定理 A で述べた同値な条件が具体的にどの様な等質空間に対して成り立つかを追及した。

2 複素半単純対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ における不連続群

この節では G/H を複素半単純対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ とする。ここで $G_{\mathbb{C}}$ は複素単純リー群、$K_{\mathbb{C}}$ は複素解析的な包合的自己同型写像 θ の固定部分群とする。リー環レベルでは、$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ などの 7 つの古典型の系列と、$(\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}},\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}})$ の様な例外型の系列が 12 個ある。この場合の主結果は次の様に述べる事が出来る。

定理 B. 既約な複素対称空間 $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ が**条件** N（あるいは同値な**条件** SL）を満たすための必要十分条件は、

$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})\simeq(\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(q,\mathbb{C}))$$

となる事である。ただし、p、q は奇数で、$p+q$ は 4 の倍数。

$G_{\mathbb{C}}$ が複素リー群の場合には、**条件** SL は

条件 $SL_{\mathbb{C}}$: $SL(2,\mathbb{C})$ と局所同型な部分群 L で $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に固有に作用するものが存在する。

とも同値となる。よって定理 B の系として次の結果も得られる。

系 2.1. p、q は奇数、$p+q$ が 4 の倍数の時、任意のクライン群 Γ に対し、局所複素対称空間 M であって、その基本群 $\pi_1(M)$ が Γ と同型であり、その普遍被覆空間が $Spin(p+q,\mathbb{C})/Spin(p,\mathbb{C})\times Spin(q,\mathbb{C})$ と同型なものが存在する。

証明の方針をここで述べる。

定理 A は、ベキ零元の標準化に関する Jacobson–Morozov の定理と、作用の固有性に関する小林の判定条件 [4] を用いる。定理 B の証明には次の結果を援用する。

定理 C. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を単純リー環とする。この時、次の 2 条件は同値となる。

(i) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の外部自己同型写像は各ベキ零軌道を自分自身に写す。

(ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{so}(4n,\mathbb{C})$ と同型でない。

定理 C は Dynkin–Kostant 理論を用いて

$$\{\text{ベキ零軌道}\} \leftrightarrow \{\text{重み付き } Dynkin \text{ 図形}\}$$

の同一視を行い、分類を用いて重み付き Dynkin 図形の外部自己同型に関する対称性を調べて証明を行った。

外部自己同型が不連続群の問題に現れる理由の一つは Fact1.1（Calabi–Markus 現象の判定条件）を用いて証明される次の結果で説明される。

命題 2.2. $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に無限不連続群が存在するならば、θ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の外部自己同型である。特に、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は A_n、D_n、E_6 のいずれかである。

この命題 2.2、定理 C と、固有な作用の判定条件を組み合わせる事によって、定理 B が証明されるのである。

コンパクトな Clifford–Klein 形が存在するかどうかに関して知られている結果と定理 B を比較してみよう。以下では $\approx$ を局所同型の意味で用いる。

Fact 2.3. $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ は群多様体ではない既約複素対称空間とする。

(1) (小林 1992、*Benoist*1996) $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に余コンパクトな不連続群が存在するならば、$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \approx SO(4n,\mathbb{C})/SO(4n-1,\mathbb{C})$。

(2) (小林 − 吉野 2005) $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \approx SO(8,\mathbb{C})/SO(7,\mathbb{C})$ には余コンパクトな不連続群が存在する。

$SO(4n,\mathbb{C})/SO(4n-1,\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ に対して余コンパクトな不連続群が存在するかどうかについては未解決問題である。一方、系 2.1 で $p = 4n-1$、$q = 1$ とする事により $SL(2,\mathbb{C})$ の任意の離散部分群と同型な不連続群は存在する事が分かる。

3 $SL(n,\mathbb{R})$ の等質空間における不連続群

博士論文では、複素対称空間の場合だけではなく、実半単純リー群 $SL(n,\mathbb{R})$ が推移的に作用する種々の等質空間（半単純対称空間全て、及び非対称ではあるが 1990 年以降に Zimmer、Labourie、Benoist、Mozes、Margulis 等、著名な数学者達が特に余コンパクトな不連続群の存在問題をテーマにして取り上げた例）に対して条件 N、条件 SL が成り立つための必要十分条件を決定した。この要約では 3 つの例に絞って説明しよう。

なお、論文 [14] ではここに挙げた例以外の等質空間に対しても判定条件を与えた。

定理 D. (G,H) を $(SL(n,\mathbb{R}), SL(k,\mathbb{R}))$ $(k < n)$ とする。その時**条件** N(**条件** SL) が成り立つ必要十分条件は、n が偶数、または n が奇数で $k+1 < n$ が成り立っている事である。

これは対称空間ではない典型例である。まず、小林 (1990, 1992) が $n > \frac{3}{2}k + \frac{3}{2}$ の場合、$SL(n,\mathbb{R})/SL(k,\mathbb{R})$ にコンパクトな Clifford–Klein 形が存在しない事を証明した（[7, Example 5.19]）。また、小林の定理の別証明として $n > 2k$ の場合には Zimmer、Labourier、Mozes 等はエルゴード理論や Ratner の軌道閉包定理を用いる手法 (1994 − 1996) を開発した [10, 11, 15]。一方、Benoist(1996) は $n = k+1$ で n が奇数の場合も存在

しない事を証明した [1]。この条件は $SL(2,\mathbb{R})$ の固有な作用が存在しない条件に一致している事が定理 D より分かる。

次に対称空間と非対称空間を両方含む例を述べる。

定理 E. (G,H) を $(SL(n,\mathbb{R}),SO(p,q))$ $p+q \leq n$ とする。**条件** N(**条件** SL) が成り立つ必要十分条件は、$n-2\min(p,q) \geq 2$ である。

$p+q=n$ の場合は G/H は対称空間である。$p+q<n$ あるいは $p=q$ ならば、$SL(n,\mathbb{R})/SO(p,q)$ にはコンパクトな Clifford–Klein 形が存在しない事が知られている [7]。特に、$SL(n,\mathbb{R})/SO(p,q)$ $(p+q<n-1)$ には余コンパクトな不連続群は存在しないが、$SL(2,\mathbb{Z})$ と同型な不連続群は存在する事が分かる。

最後に、H と L の役割を交換した定理を述べる。定理 F の等質空間を取り上げた直接の理由は、同じ空間に対して Margulis(1997) がユニタリ表現論を用いて、$n>4$ の場合、余コンパクトな不連続群が存在しない事を証明したからである [12]。

定理 F. $\rho : SL(2,\mathbb{R}) \to SL(n,\mathbb{R})$ を既約な実表現とする。
$SL(n,\mathbb{R})$ の（標準的）部分群 L に対し、L が $SL(n,\mathbb{R})/\rho(SL(2,\mathbb{R}))$ に固有に作用するかどうかは、以下の表で与えられる。

L	固有	固有ではない
$SL(k,\mathbb{R})$ $(1 \leq k \leq n-1)$	n は偶数	
	n は奇数 $k+1<n$	n は奇数 $k+1=n$
$SO(p,q)$ $(p+q \leq n)$	$n-2\min(p,q) \geq 2$	$n-2\min(p,q)=0$ *or* 1
$Sp(m,\mathbb{R})$ $(1 \leq 2m \leq n)$	$n-2m \geq 2$	$n-2m=0$ *or* 1
$SL(m,\mathbb{C})$ $(1 \leq 2m \leq n)$	全ての m	無し

参考文献

[1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Ann. Math.* **144** (1996), 315–347.

[2] E. Calabi and L. Markus, Relativistic space forms, *Ann. Math.* **75** (1962), 63–76.

[3] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, *Progress in Mathematics.* **140** Birkhäuser, (1996).

[4] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

[5] T. Kobayashi, Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type, In: Proceedings of ICM–90 satellite conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras, Fuji–Kawaguchiko, 1990 (eds. T. Kawazoe, T. Oshima and S. Sano), World Scientific, 1992, pp. 59–75.

[6] T. Kobayashi, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.

[7] T. Kobayashi, Discontinuous groups and Clifford–Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. In: Lecture Notes of the European School, August 1994, (eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted), Perspectives in Math **17**. Academic Press (1996), 99–165.

[8] 小林俊行 非リーマン等質空間の不連続群論 (eds. B. Engquist and W. Schmid)、数学の最先端、21 世紀への挑戦、第 1 巻 (2002)、18–73、(邦訳)、Springer.

[9] T. Kobayashi, Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds, *Acta Appl. Math.* **73** (2002), 115–131.

[10] F. Labourie, S. Mozes, and R. J. Zimmer, On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), 955–965.

[11] F. Labourie, R. J. Zimmer, On the non-existence of cocompact lattices for SL(n)/SL(m), *Math. Res. Lett.* **2** (1995), 75–77.

[12] G. A. Margulis, Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients, *Bul. Soc. math. France.* **125** (1997), 447–456.

[13] G. マルグリス 剛性理論における問題と予想 数学の最先端、21 世紀への挑戦、第 6 巻 (2007)、64–83、(邦訳)、Springer.

[14] K. Teduka, Proper action of $SL(2,\mathbb{R})$ on $SL(n,\mathbb{R})$– homogeneous spaces, *Jour. Math. Sci, the University of Tokyo.* accepted for publication.

[15] R. J. Zimmer, Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 159–168.