論文審査の結果の要旨

氏名： 手塚 勝貴

本論文提出者の手塚勝貴氏は、フックス群やクライン群のような双曲群が局所対称空間の基本群として現れるか、という問題を研究した。

一般に

> **問題 A.** 完備な局所対称空間 X の基本群 $\pi_1(X)$ にはどの様な制約があるか？

という問題はリーマン幾何の枠組みを超えた場合非常に困難である。

その一例として、X がアファイン平坦な局所対称空間の場合を考えてみる。Milnor (1977) はリーマン幾何における古典的な結果 (Bieberbach 1911) と同様に、アファイン平坦な場合でも基本群 $\pi_1(X)$ には非可換自由群が含まれないと予想した。しかし、Margulis (1983) はその反例を $\widetilde{X} = \mathbb{R}^3$ の場合に構成した。米ソの指導的数学者によるこの出来事は問題 A が特別な事例においても極めて難しいことを象徴するものであった。

別の例として、ローレンツ計量をもつ局所対称空間 X の場合を考えよう。このとき、X の断面曲率が正で一定という仮定の下で、基本群 $\pi_1(X)$ は必ず有限になってしまうという現象は Calabi と Markus によって発見された (Ann. Math. 1962)。X の普遍被覆である大域ローレンツ対称空間 $\widetilde{X}$ では、その等長変換からなる不連続群が極端に乏しいという意味で Calabi–Markus の現象は、この分野の将来性に対してネガティブな側面を強調する結果であった。この現象に関しては、25 年後に、それがどのような状況で起こるかについて、一般の不定符号の計量をもつ簡約型等質空間 G/H (特に半単純対称空間) に対して、リー群 G と H の実階数条件で判定できることが証明された (小林俊行、Math. Ann. 1989)。この判定条件によって、逆に、$|\pi_1(X)| = \infty$ となるような局所等質空間が十分豊富にあるというポジティブな側面がわかったのである。

そこで、今度はどれだけ複雑な基本群が局所等質空間に起こりうるかという自然な疑問が考えられる。$\pi_1(X)$ が '最大' となるのは X がコンパクトのときである。コンパクト形の存在問題、言い換えれば普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ に余コンパクトな不連続群が存在するかどうかという問題は、やはりリーマン構造を仮定した場合には古くから研究されている。すなわち、1950 年代から 1960 年代初頭に Siegel、Borel 等によって代数群を用

いた手法でコンパクトな局所リーマン対称空間の存在が証明され、さらに、双曲空間に対しては、Mostow、Gromov、Piateski–Shapiro 等によって非算術的部分群も構成された。一方、非リーマン対称空間に対しては長い間、手つかずの問題であった。余コンパクトな不連続群の存在問題に対して一般的な設定での構成法（小林）と障害（obstruction）（小林–小野薫）が 1980 年代の後半に発見され、その後不連続群論からエルゴード理論やユニタリ表現論にまたがる手法を用いた新しい研究の潮流が国際競争の中で生まれ育っている（R. Zimmer、G. Margulis、Benoist、Oh、Witte 等）。

このような現状において、本論文提出者の手塚勝貴氏は、Calabi–Markus 現象と余コンパクトな不連続群の存在の中間に位置する場合に焦点を当てた。すなわち、非可換自由群やフックス群といった $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群やクライン群といった $SL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群が $\pi_1(X)$ として実現できるかということをテーマとして問題 A に取り組んだのである。

具体的には以下の 2 系列の非リーマン等質空間の不連続群による商空間としてどのようなものが可能であるかを研究した。

1) $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$、　$G_{\mathbb{C}}$ は複素単純リー群、$(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ は複素対称対

2) G/H、　$G = SL(n,\mathbb{R})$、H は典型的な簡約部分群

この要旨では、1) の場合のみを述べることにする。この場合、$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ は複素対称空間となるが、$G_{\mathbb{C}}$ が単純リー群という仮定の下ではリー環レベルでは、$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ などの 7 つの古典型の系列と、$(\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}, \mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}})$ などの例外型の系列が 12 個に分類される (Killing, Cartan)。手塚氏の主結果は次の様に述べられる。

定理 B. $G_{\mathbb{C}}$ を複素単純リー群とし、$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ を複素対称空間とする。このとき、次の 4 つの条件は同値である。

(i) $G_{\mathbb{C}}$ のベキ零元 $\gamma\ (\neq e)$ で、それが生成する自由アーベル群 $\langle\gamma\rangle$ が $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に固有不連続に作用する。

(ii) $SL(2,\mathbb{R})$ が $G_{\mathbb{C}}$ への適当な準同型を通じて $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に固有に作用する。

(iii) $SL(2,\mathbb{C})$ が $G_{\mathbb{C}}$ への適当な準同型写像を通じて $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ に固有に作用する。

(iv) $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \simeq (\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C}),\mathfrak{so}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(q,\mathbb{C}))$
ただし、p、q は奇数で、$p+q$ は 4 の倍数。

クライン群は $SL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群である。また非可換自由群は $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群として実現される。定理 B から問題 A に対する以下の解答が証明された。

系 C. p、q は奇数、$p+q$ が 4 の倍数の時、任意のクライン群 Γ に対し、局所複素対称空間 X であって、その基本群 $\pi_1(X)$ が Γ と同型であり、その普遍被覆空間が $Spin(p+q,\mathbb{C})/Spin(p,\mathbb{C})\times Spin(q,\mathbb{C})$ と同型なものが存在する。

また $\pi_1(X)$ が非可換自由群になるような X も同様に存在する。

主定理の証明は、(a) ベキ零元の標準化に関する Jacobson–Morozov の定理と、(b) 作用の固有性に関する小林の判定条件に加えて次の代数的な結果を用いる。

定理 D. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を単純リー環とする。この時、次の 2 条件は同値となる。

(i) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の外部自己同型写像は各ベキ零軌道を自分自身に写す。

(ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{so}(4n,\mathbb{C})$ と同型でない。

本論文提出者の手塚氏は Dynkin–Kostant 理論を用いて定理 D を証明したのであるが、定理 D のような純代数的な結果を発見し、それを局所対称空間の大域構造の定理に昇華させたアイディアは斬新で興味深い。

提出論文の第 2 節では変換群が $SL(n,\mathbb{R})$ の場合にもベキ零軌道に関する代数的な結果をまず準備して、フックス群と同型な基本群をもつ局所等質空間がどのような場合に可能であるかについて明確で決定的な結果を得た。

このように本論文は、局所対称空間の大域構造に関して、リーマン幾何の枠組を超えた場合に意義深い新しい知見をもたらしたものであり、よって論文提出者 手塚勝貴氏は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。