博士論文審査結果の要旨

論文題目: An approach to the Decision Theory under Knightian Uncertainty
(ナイト流不確実性理論への一考察)

氏名：小島寛之

本論文はKnight流不確実性理論を扱ったものであり、Choquet期待効用よりも豊かな構造を持つ効用関数を提示し、その公理化を行っている。また、Knight流不確実性理論で使用したテクニックを協力ゲームの理論に応用し興味深い結果を得ている。

本論文の構成は以下の通りである。

第1章　Introduction

第2章　ε-contamination and Comonotonic Independence Axiom

第3章　Cominimum Additive Operators

第4章　Coextrema Additive Operators

第5章　A Refinement of the Myerson Value

Knight流不確実性理論の概要

期待効用の理論は、Neumann and Morgenstein (1947) により提唱されその後の経済学に大きな影響を与えた。より具体的には、少なくとも一見したところ当前に見える選好に関する公理系と両立するのは期待効用のみであることを証明した。また、この理論は客観確率に関するものであったが、Savage (1954) は主観確率の場合にも期待効用を公理系によって表現できることを証明した。しかし一方で、不確実性下の決定において人々は期待効用を最大化してはいないと思われる実験結果もでてきた。そのなかで、もっとも本論文と密接な関係があるのがEllsbergの実験である。彼は、「はっきりと五分五分と確率のわかっている賭け」のほうを「確率がわからないために五分五分と考えるしかない賭け」より好む傾向があることを示した。これは、従来の確率理論を背景にした期待効用理論では説明できない。この結果は、人間が「確率のわかる環境」と「確率のわからない環境」を区別することの重要性を示唆している。この2つの環境

の差の重要性を最初に指摘したのが F. Knight である。彼は前者を「リスク」、後者を「不確実性」と呼んだ。本論文の目的は、この Knight 流不確実性理論の精緻化である。

Schmeidler (1989) と Gilboa (1989) は、Ellsburg のパラドックスが確率理論から加法性の性質を除去すれば説明可能であることを示した。より具体的には、通常の確率測度による積分である期待効用ではこのパラドックスは説明できないが、加法性のない測度による積分では説明できるということである。ただし、加法性なしでは通常の積分は定義できないため Choquet 積分という概念を使うことになる。なお、測度に加法性を課さず単調性のみを要請したものを capacity と呼ぶ。つまり、capacity とは, state space S の部分集合上に定義される関数で、 (i)$v(\emptyset) = 0, v(S) = 1$, (ii)$0 \leq v(A) \leq 1$ for all $A \subseteq S$, (iii) $A \subseteq B$ implies $v(A) \leq v(B)$ を満たすものである。Choquet 積分とは、この capacity による積分である。

また、彼らはこの Choquet 期待効用の公理による表現も行っている。この公理化は、本論文と密接に関わるのでやや具体的に説明しておこう。以下では、Savage の公理は複雑であるため、より簡単な Anscombe and Aumann (1963) の公理を用いて説明を行う。彼らは選好に関する５つの公理、$AA1$(Ordering), $AA2$(Independence), $AA3$(Continuity), $AA4$(Monotonicity), $AA5$(Non-degeneracy) により主観確率下の期待効用が表現できることを示した。Schmeidler は、AA2(Independence) のみをを $AA2_{como}$ (comonotonic independence) で置き換えることにより Choquet 期待効用の公理化に成功した。ここで、comonotonic independence とは、comonotonic な選好にのみ independence axiom を課すということである。

Theorem (Schmeidler 1989)
２項関係 $\succeq$ が $AA1, AA2_{como}, AA3, AA4, AA5$ 満たすことは、capacity v と affine 関数 u が存在してすべての f、g に対し

$$f \succeq g \Leftrightarrow \int_S u(f(s))dv(s) \geq \int_S u(g(s))dv(s)$$

が成立することと必要十分。ここで積分は Choquet 積分。

各章の内容の要約・紹介

本論文の目的の一つは、Choquet 期待効用より一般的な効用関数を提示しその公理化を与えることにある。まず、第２章では ε-contamination と呼ばれる効用関数

$$J(a) = (1-\varepsilon)\int_S a(s)d\mu(s) + \varepsilon \min_{s\in S} a(s) \tag{1}$$

(ここで a は random variable) の公理化を行う。

まず 2 つの関数が S 上で同一の minimizer を持つとき *cominimum* という。*cominimum* な選好に関してのみ independence axiom を課すのが $AA2_{comi}$ (cominimum independence) である。

Theorem： 2 項関係 $\succeq$ が $AA1, AA2_{comi}, AA3, AA4, AA5$ 満たすことは、finitely additive な測度 μ と affine 関数 u が存在してすべての f、g に対し

$$f \succeq g \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\int_S u(f(s))d\mu(s)+\varepsilon \min_{s\in S} u(f(s)) \geq (1-\varepsilon)\int_S u(g(s))d\mu(s)+\varepsilon \min_{s\in S} u(g(s))$$

が成立することと必要十分。

第 3 章では、ε-contamination を特例として含むより大きなクラスである E-capacity の特徴付けを行っている。E-capacity とは、Eichberger and Kelsey が導入したものであり、その目的は Ellsburg の原論文に書かれているアイデアそのものを公理化することであった。また、Gilboa の導入したマルチピリオド決定と呼ばれる効用関数の公理化にも応用している。これは、「人間が大きな変化を嫌う」性向、バリエーションアバース、を導入するための研究である。

まず、状態空間 S に対し部分集合の集合 $\mathcal{E} \subseteq 2^S$ を考える。集合 T は以下を満たすとき $\mathcal{E}$-complete という：

すべての 2 点 $\omega, \omega' \in T$ に対し $\{\omega, \omega'\} \subseteq E \subseteq T$ を満たす $E \in \mathcal{E}$ が存在する。

また、$\mathcal{E}$ は以下を満たすとき *complete* という：

$\mathcal{E}$ がすべての $\mathcal{E}$-complete 部分集合を含む。

Theorem: $\mathcal{E}$ を complete と仮定する。このとき、以下は同値：

1. $v = \sum_T \beta_T u_T$ は $\mathcal{E}$-cominimum additive,
2. $\int x dv = \sum_{T\in\mathcal{E}} \beta_T \min_T x$.

この定理は、第 2 章の ε-contamination を特例として含み、さらに Gilboa の導入したマルチピリオド決定と呼ばれる効用関数の公理化にも応用可能である。

第 4 章では、coextrema 加法性と呼ばれる性質を持つ作用素の特徴付けを行っている。2 つの確率変数が coextrema であるとは、与えられた特定の事象たちにおいてどの事象上でも共通の根源事象で最小値を取るばかりではなく、さらに共通の事象で最大値も取るもののことをいう。この章では、その特定の事象たちの作る族がある正規条

件を満たす場合の、coextrema 加法性を持つ作用素のクラスを完全に決定している。具体的には

$$I(x) = \int x dp + \sum_{E \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{F}_1} \{\lambda_E \max_E x + \mu_E \min_E x\}. \tag{2}$$

と表現される効用関数の特徴付けと公理化を行っている。

第５章では、第３，４章で導入したテクニックを協力ゲームに応用している。協力ゲームでは多くの解概念が提唱されているが、中でも Shapley 値は最も有名なものの１つである。Myerson (1977)(1980) は、提携とは別に、「会議構造」と呼ばれる別の構造がある場合の特殊な協力ゲームを考察した。そして、会議構造において位相幾何学的な意味で「連結成分」となるような提携の利益を Shapley 値にしたがって配分するための２つの公理から成る公理系を与えた。ある２人のメンバーが位相幾何学的な意味で連結であるというのは、一方のメンバーからスタートして、共通メンバーの存在する会議をたどっていって他方のメンバーにたどりつける関係のことである。このような関係を「2人は間接的に関係性を持つ」と呼ぶことができる。この論文では、Myerson の結果を発展させ、「直接的な関係性」だけを関係性として認める場合の会議構造における Shapley 値を３つの公理によって特徴付けている。

論文の評価

Knight 流不確実性の理論は、ある意味、いかなる集合族に局所的加法性を課すかに帰着する。本論文では cominimum および coextrema という概念を導入し、cominimum 確率変数あるいは coextrema 確率変数についてだけ加法性を保持しているような作用素のクラスを完全に決定した。これにより、ある意味 Choquet 期待効用より豊かな性質を持つ効用関数を提示し、またそれを公理化することに成功した。また、Knight 流不確実性の理論で使用したテクニックを使って Myerson の会議構造におけるシャプレー値の理論を発展させた。

これらの結果は、Knight 流不確実性の理論を精緻化しより豊かな構造を提示したという意味で高く評価されるものである。実際、これらの結果は国際的にも高く評価されており、第３章は既に Journal Mathematical Economics に掲載されている。また、第５章は国際的に高く評価されているゲーム理論の学術誌に投稿中で改訂の要求がきている。

なお、第３、４、５章は梶井厚志氏（京都大学）および宇井貴志氏 (横浜国立大学) との共著である。しかし、小島寛之氏のこれらの論文に対する貢献度は非常に高いことを付け加えておく。

以上により、審査委員は全員一致で本論文を博士（経済学）の学位授与に値するものであると判断した。

審査委員（主査）神谷　和也
神取　道宏
松島　　斉
松井　彰彦
柳川　範之