

それぞれの電荷が置かれた点において、特異点を発生しないような方法でサイクルがつぶれるようになっているわけですが、この電荷を表す3つの座標のうち2つが特異点を特徴づけるパラメータ、残りの一つがゲージ群の大きさに対応しています。またこの泡状時空には非自明なディスクが電荷の数だけ存在していますが、このディスク周りの NSNS, RR2 フォームのホロノミーが残り二つの特異点を特徴づけるパラメータに対応しているわけです。ちょうどストリングのアハロノフ-ボーム位相に相当しており周期性をもっています。この周期性により両者の離散的な $SL(2, Z)$ 双対性が完全にマッチするわけです。さらに異なる二つの電荷が同じ時空点に来た場合、泡状時空には特異点が発生します。一方この状況をゲージ理論の中で見てみると、二つのゲージ群が対称性の回復によってより大きな一つのゲージ群に昇格し、これにより経路積分に特異性が発生する事に対応している事が分かりました。

さらにゲージ理論、D ブレーン、泡状時空においてひも演算子と局所演算子（カイラルプライマリー演算子、R 対称性カレント、エネルギー運動量テンソル）との相関関数、また非局所演算子（ウィルソン、トフーフト演算子）との相関関数を計算し、異なる計算が同じ結果を与える事を突き止めました。これらの物理量は超対称性により保護されていないのでそれぞれの計算結果の一致は非自明なものです。また D ブレーンの計算結果は、ゲージ理論の古典近似に対する量子補正がトフーフト結合定数の特定の冪までしか受けない事を示唆しており、これは相関関数が行列模型で書き表せることを示唆している事を突き止めました。また局所演算子の行列模型においては固有値が自由フェルミオンとして表せる事が知られており、そのフェルミオンの位相空間が対応する泡状時空の境界条件もしくは電荷分布として現れてくる事が分かっています。一方同様の事をひも演算子に対して推測するならば、境界条件（電荷分布）が孤立した点になっている、つまり背後にある行列模型の固有値がボーズ-アインシュタイン凝縮を起こしている事が予想されます。これらをもとにひも演算子に対する行列模型を提案しました。またひも演算子とウィルソン、トフーフト演算子の相関関数が S デュアリティーのもとで完全に移り変わるを見つけました。これは S デュアリティーの動的側面を検証するおそらく最初の例です。

次にウィルソンループにおいても同様の解析を行いました。まずゲージ理論において 16 個の超対称電荷を保つ演算子は 2 種類あり、一つは直線のウィルソンライン、もう一つは閉じたウィルソンループです。両者は共形変換で結びついているわけですが、ウィルソンラインはポアンカレ超対称電荷を保ち自明な期待値を持つのにに対しウィルソンループは共形アノマリーの為に結合定数に依存した期待値を持ちます。通常、強結合領域の物理量は超対称性により量子補正を受けない量、つまり結合定数に依存しないような量以外は計算する事が難しいのですが、このウィルソンループは結合定数に依存し、なおかつその全てのオーダーをガウシアン行列模型により解析する事が出来るという特徴を持っています。このためゲージ重力対応において非常に重要な情報を提供してくれるわけです。ウィルソン演算子はその幾何学的形状とゲージ群の表現により特徴づけられるわけですが、その表現はヤング図により表すことが出来ます。例えば $U(N)$ のゲージ群をもつ

理論を考えてみます。特に興味があるのはヤング図が g 個のブロックをもち、それぞれのブロックの行と列がオーダー N 、全体としてボックスの数が N^2 の場合です。この場合行列模型の固有値分布はジーナス g のリーマン面により記述されます。これを用いてひも演算子同様な様々な相関関数を計算しました。特にエネルギー運動量テンソルとウィルソンループとの相関関数がトーフト演算子との相関関数と S デュアリティーにより結びついていることが明らかになりました。ひも演算子の場合にも同様な結果が得られましたが、ウィルソンループの場合は行列模型が分かっているので S デュアリティーに対するより確かな証拠が得られたこととなります。一方重力双対においては、ウィルソンループの表現の大きさにより様々な実現の仕方があります。まず基本表現の場合には基本弦が対応しています。さらに表現の大きさがオーダー N 程度になると基本弦は $D3$ ブレーンもしくは $D5$ ブレーンに姿を変えます。さらにオーダー N^2 になるとブレーンはフラックスに置き換えられ、泡状時空が出現します。この泡状時空はその境界条件として行列模型のリーマン面の情報を完全にもっており、表現を指定すると唯一に決定されます。この時空にカルツァークラインホログラフィの方法を用いて様々な相関関数を計算しました。その結果行列模型、ブレーンの計算結果を完全に再現する事が分かりました。