論文の内容の要旨

論文題目　Generalized Okubo systems and the middle convolution

（一般大久保型方程式とミドルコンボルーション）

氏名　川上 拓志

Fuchs 型方程式においては，各確定特異点のまわりでの局所的な多価性を記述する量として特性指数という複素数が定義される．では逆に，特異点の位置を決めて，そこで特性指数を与えたとき，方程式は一意に定まるかというと，一般には定まらない．特性指数を与えたときに決まらない方程式のパラメータをアクセサリーパラメータという．また，アクセサリーパラメータを持たないという性質を Katz に従って rigid と呼ぶことにする．

有名な Gauss の超幾何方程式は rigid な方程式であり，rigid な方程式については，そのモノドロミーが特性指数によって具体的に記述できることがわかっている．

従って，rigid な Fuchs 型方程式によって決まる関数を，超幾何関数の仲間として研究することは興味深いと思われる．

Katz は，Fuchs 型方程式を Fuchs 型方程式にうつす middle tensor operation と middle convolution という操作を導入し，全ての既約かつ rigid な Fuchs 型方程式は一階の Fuchs 型方程式に上の 2 つの操作を有限回施すことで得られることを示した．これは全ての既約かつ rigid な Fuchs 型方程式を構成するアルゴリズムを与えている．また，Dettweiler と Reiter はそれらの操作を線型代数的に記述し直している．論文では Dettweiler と Reiter の用語に従い，middle tensor operation の代わりに addition と呼んでいる．

一方，横山利章氏は，大久保型方程式に対する拡大と縮小という操作を導入し，既約，rigid な半単純大久保型方程式は一階の大久保型方程式にその 2 つの操作を有限回施すことで得られることをほぼ同時期に示した．ここで大久保型方程式とは

$$(x-T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = A\Psi$$

という形の線型常微分方程式系である．但し T は定数対角行列，A は定数行列である．実は middle convolution も大久保型方程式と関連している（後で述べる）．

以上はFuchs型方程式に対する理論であるが，特殊関数には，Fuchs型ではない方程式によって定義されるものも多く存在するので，これらの理論を不確定特異点を持つ方程式も扱えるように拡張することには意義があると思われる．

本論文は2つの部分から成っている．第I部では，Katzの2つの操作のうち非自明なmiddle convolutionを，非Fuchs型方程式に対してどのようにして拡張すればよいかについて考察した．そのために，大久保型方程式を不確定特異点を持つように一般化し，その一般大久保型方程式の集合 $\mathcal{GO}$ から大久保型とは限らない方程式（但し無限遠は確定特異点とする）の集合 $\mathcal{E}$ への写像 π を定義した．また，普通の意味での大久保型方程式の集合を $\mathcal{O}$，Fuchs型方程式の集合を $\mathcal{F}$ とする（正確な定義は本論文参照）．その上で，まず写像 π によるKatz-Dettweiler-Reiterのmiddle convolutionの解釈を与えた．これによると，middle convolutionは，与えられたFuchs型方程式を大久保型方程式に変換し，右辺の行列をスカラー行列でずらし（これを T_λ と表す），再び π でうつすことに対応する．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "T_\lambda"] \arrow[d, "\pi|_{\mathcal{O}}"'] & \mathcal{O} \arrow[d, "\pi|_{\mathcal{O}}"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "mc_\lambda"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

従って同様の手続きによって非Fuchs型方程式に対するmiddle convolutionの類似物が定義できる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{GO} \arrow[r, "T_\lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{GO} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{E} \arrow[r, "\text{``}mc_\lambda\text{''}"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

第I部の主結果として，この π の全射性を示した．これは言い換えると，任意の(無限遠を確定特異点に持つ）線型常微分方程式系は一般大久保型方程式に変換できることを意味している．第I部の最後に，非Fuchs型方程式に対するmiddle convolutionの計算の具体例として，Painlevé第IV，第V方程式に付随する線型方程式を扱い，Bäcklund変換が得られることを示した．

第II部では特異点の合流との関係について述べた．任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して，パラメータ ε を含むFuchs型方程式 $A(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ で，$\varepsilon \to 0$ の極限で $A(\varepsilon) \to A$ となるものを構成することができる．これは A の各不確定特異点の周りに確定特異点を適当に散らすことで実現できる．

このとき，$A, A(\varepsilon)$ の各々に対応する大久保型方程式にも上の極限と両立するように合流を定義できることを示したのが第II部の結果である．