論文審査の結果の要旨

氏　名　　川上　拓志

Fuchs 型方程式系の標準系であるシュレージンガー系

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{A_1}{x-t_1} + \cdots + \frac{A_p}{x-t_p}\right) Y$$

は，特性指数以外のパラメータ，これをアクセサリーパラメータという，を多数含む。もし，考えている微分方程式がアクセサリーパラメータを含んでいないならば，このような微分方程式は rigid である，という。Fuchs 型微分方程式の典型例である Gauss の超幾何方程式は rigid であり，モノドロミーを始め，その大域解の振る舞いは具体的に記述できる。一般に，rigid な微分方程式については，そのモノドロミーが特性指数によって具体的に記述できることがわかっている.

この rigid という概念を導入した N.M.Katz は，Fuchs 型方程式を Fuchs 型方程式にうつす 2 つの操作を考え，この 2 つの操作を 1 階の Fuchs 型方程式に有限回施すことにより全ての既約かつ rigid な Fuchs 型方程式が得られることを示した。後に M.Dettweiler と S.Reiter はこの Katz の操作を線型代数的に記述し直し，これらを middle tensor operation，middle convolution と呼んだ。これにより，全ての既約かつ rigid な Fuchs 型方程式を構成するアルゴリズムが与えたれたことになる。

一方，T.Yokoyama は，大久保型方程式に対する extension と restriction という操作を導入し，任意の既約，rigid，半単純な大久保型方程式は階数 1 の大久保型方程式に extension と restriction を有限回施すことで得られる，という結果を，上述の諸結果とほぼ同時期に示している。大久保型方程式とは，T を定数対角行列，A を定数行列，としたとき

$$(x-T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = A\Psi$$

という形の線型常微分方程式系である。

これらの理論は，いずれも Fuchs 型微分方程式に関するものであるが，これを不確定特異点を持つ微分方程式に対しても有効に拡張することは当然必要である。

提出論文は，Katz の 2 つの操作のうち非自明な middle convolution の，非 Fuchs 型方程式に対する拡張を考察した第　部と，特異点の合流について調べた第　部との 2 つの部分から成っている。主要部である第 I 部では，不確定特異点を持つように拡張した一般大久保型方程式

$$(xI-T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = -GRG^{-1}\Psi$$

が対象である。ここで，R は対角行列，T は Jordan 行列である。一般大久保型方程式は，$x=\infty$ は確定特異点であるが，それ以外の特異点は不確定型である。

まず普通の意味での大久保型方程式の集合を $\mathcal{O}$，シュレージンガー系の集合を $\mathcal{F}$ とし，$\mathcal{O}$ から $\mathcal{F}$ への写像 π を定義する。大久保型方程式において右辺の A を $A+\lambda I$ に変える変換を T_λ とすると Katz-Dettweiler-Reiter の middle convolution mc_λ について，次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{T_\lambda} & \mathcal{O} \\ {\scriptstyle \pi|_{\mathcal{O}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi|_{\mathcal{O}}} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow[mc_\lambda]{} & \mathcal{F} \end{array}$$

このように middle convolution を解釈すると，必ずしも Fuchs 型とは限らない微分方程式系に対しても，middle convolution の類似物が定義できる。すなわち，一般大久保型方程式の集合 $\mathcal{GO}$ から，$x=\infty$ は確定特異点である微分方程式系の集合 $\mathcal{E}$ への写像 π を定義し．次の図式が成り立つようにする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GO} & \xrightarrow{T_\lambda} & \mathcal{GO} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow[\text{“}mc_\lambda\text{”}]{} & \mathcal{E} \end{array}$$

主結果は次の定理である。

定理　　π は全射である。

提出論文の第 I 部の結果をまとめると次の通りである。

1. $\mathcal{O}$ と $\mathcal{GO}$ の場合について π を構成したこと。
2. 上の 2 通りの場合について π の全射性を示したこと。
3. $\mathcal{E}$ の方程式に対しても middle convolution の概念を拡張したこと。
4. 拡張された middle convolution の計算の具体例として，Painlevé 第 IV，第 V 方程式に付随する線型方程式を扱い，Bäcklund 変換が得られることを示したこと。

第 II 部では，$\mathcal{E}$ の任意の方程式 E に対して，パラメータ ε を含む Fuchs 型方程式 $E(\varepsilon)\in\mathcal{F}$ で，$\varepsilon\to 0$ の極限で $E(\varepsilon)\to E$ となるものを構成した。このとき，E，$E(\varepsilon)$ の各々に対応する (一般) 大久保型方程式にも，上の極限と両立するように合流を定義できることを示した。

提出論文で考察されている問題は自然なものであるが，その研究は始められたところである。rigid な微分方程式に関する精緻な結果などが今後の課題となり，今後の研究の進展が期待される。よって，論文提出者　川上　拓志　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。

試験の結果の要旨

氏　名　　　川上　拓志

成績　　　合　格

本審査委員会は，平成２１年２月６日，論文提出者に対し，数理科学について口述試験を行った。

その結果，論文提出者は，数理科学に関し，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な学識をもつものと認め、審査委員全員により合格と判定した。