論文の内容の要旨

論文題目 Large deviations and limit theorems of law of large numbers' type for the processes related to the interface models
（界面モデルに関連した確率過程に対する大偏差原理と大数の法則型極限定理）

氏　名　乙部 達志

水と氷や空気中の水滴のように異なる相を分離する境界面のことを界面という．本論文では界面モデルに関連した以下の四つの問題

1. Concentration under scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks
2. Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers
3. Law of large numbers for Wiener measure with density having two large deviation minimizers
4. Large deviations for the $\nabla\varphi$ interface model with self potentials

について研究した．

界面の形は, 大偏差原理の速さ関数 (界面の総表面張力) の最小解が唯一つの場合はその最小解になる事が分かっている．そこで, 大偏差原理の速さ関数の最小解が 1 つでない場合は界面の形はどうなるのかといった自然な疑問が出てくる．この事は, 大偏差原理の精密化を行う事により解決する事が出来る．

上記 1, 2, 3 ではランダムウォークモデル ($d=1$ の $\nabla\varphi$ 界面モデルとみなすこともできる) に対して上の精密化の問題を考察し, 4 では舟木–坂川 (Adv. Stud. Pure Math., **39**, Math. Soc. Japan, 2004, pp. 173–211) で扱われた自己ポテンシャルよりも広いクラスの自己ポテンシャルを持つ $\nabla\varphi$ 界面モデルに対する大偏差原理を考察している．

1. Concentration under scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks (Erwin Bolthausen, 舟木直久 両教授との共同研究)

ピンニングの影響がある Gauss 的ランダムウォークを考え, 対応する大偏差原理の速さ関数の最小解が唯一つでない時のスケール極限について考察した．

$D=[0,1]\subset\mathbb{R}$ とし, $D_N=\{0,1,\dots,N-1,N\}$ とおく．このとき, ランダムウォークの微視的な位置を表す変数 $\phi=\{\phi_i\in\mathbb{R}^d,\ i\in D_N\}$ に対して, 巨視的な位置を表す変数 $\{h^N(t),\ t\in D\}$ を微視的な変数を i-方向, ϕ-方向共に $1/N$ 倍にスケール変換して得られる $h^N\left(\frac{i}{N}\right)=\frac{1}{N}\phi_i,\ i\in D_N$ の線形補間として定義する．$M\subset\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の n-次元部分空間 ($M\cong\mathbb{R}^n,\ 0\le n\le d-1$) とし, $M^\perp$

をその直交補空間とする. $y=(y^{(1)},y^{(2)})\in\mathbb{R}^d\cong M\times M^{\perp}$ と分解し, 測度 $\nu(dy)=dy^{(1)}\delta_0(dy^{(2)})$ を考える. また, $r\equiv\operatorname{codim}M=d-n$ と書き, Markov 連鎖の状態空間が $\mathbb{R}^d_+=\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+$ の時は $M\subset\partial\mathbb{R}^d_+$ と仮定する.

また, $\varepsilon\geq 0$, $a,b\in\mathbb{R}^d$(または $\mathbb{R}^d_+$) として $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$ または $(\mathbb{R}^d_+)^{N+1}$ 上の Markov 連鎖の分布を次で定義する. μ の肩の D,F は時刻 N での境界条件が Dirichlet, Free である事をそれぞれ表している.

$$\mu_N^{D,\varepsilon,(+)}(d\phi)=\frac{1}{Z_N^{D,\varepsilon,(+)}}e^{-H_N(\phi)}\delta_{aN}(d\phi_0)\prod_{i\in D_N\setminus\{0,N\}}\left(\varepsilon\,\nu(d\phi_i)+d\phi_i^{(+)}\right)\delta_{bN}(d\phi_N),\qquad(1)$$

$$\mu_N^{F,\varepsilon,(+)}(d\phi)=\frac{1}{Z_N^{F,\varepsilon,(+)}}e^{-H_N(\phi)}\delta_{aN}(d\phi_0)\prod_{i\in D_N\setminus\{0\}}\left(\varepsilon\,\nu(d\phi_i)+d\phi_i^{(+)}\right).\qquad(2)$$

ここで $d\phi_i^{(+)}$ は $\mathbb{R}^d$(または $\mathbb{R}^d_+$) の Lebesgue 測度, $Z_N^{D,\varepsilon,(+)}$, $Z_N^{F,\varepsilon,(+)}$ は規格化定数である. また, ハミルトニアンは $H_N(\phi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}|\phi_i-\phi_{i-1}|^2$ であり, $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^d$ の Euclid ノルムを表す.

定理 1. $\mu_N=\mu_N^{D,\varepsilon,(+)}$, $\mu_N^{F,\varepsilon,(+)}$ の下, $h^N=\{h^N(t),\ t\in D\}$ に対して $N\to\infty$ とした時, $C([0,1],\mathbb{R}^d_{(+)})$ 上で速さ N の大偏差原理が成り立つ. (規格化していない) 速さ関数 $\Sigma=\Sigma^{D,\varepsilon,(+)}$, $\Sigma^{F,\varepsilon,(+)}$ の形は $\Sigma(h)=\frac{1}{2}\int_0^1|\dot{h}(t)|^2\,dt-\xi|\{t\in D;\ h(t)\in M\}|$ である. ここで $\xi=\xi^{D,\varepsilon,(+)}$, $\xi^{F,\varepsilon,(+)}$ は $\varepsilon\geq 0$ に対して定義される free energy と呼ばれる非負の量である.

注意 2. ここでは詳細を述べないが, $\xi=\xi^{D,\varepsilon,(+)}$, $\xi^{F,\varepsilon,(+)}$ に関する詳しい情報も論文の中で述べている.

$\Sigma(h)$ の最小解の候補は 2 つあり, Dirichlet case の時 $\bar{h}^{D,(+)}$, $\hat{h}^{D,(+)}$, Free case の時 $\bar{h}^{F,(+)}$, $\hat{h}^{F,(+)}$ とおく. $d=1$, $M=\{0\}$ の時の最小解の形は, Dirichlet case の時は次のページの図の $\bar{h}^D$, $\hat{h}^D$ のようになり, Free case の時は $\bar{h}^F$, $\hat{h}^F$ のようになる. ただし h が 0 に交わる座標は Markov 連鎖の状態空間が $\mathbb{R}^d$ か $\mathbb{R}^d_+$ かの状況でそれぞれ異なる事に注意しておく.

以下,「$\lim_{N\to\infty}\mu_N(\|h^N-h^*\|_\infty\leq\delta)=1,\ \forall\delta>0$」を「$h^N\to h^*$」と書き,「$\lim_{N\to\infty}\mu_N(\|h^N-h^*\|_\infty\leq\delta)=c\in(0,1)$, $\lim_{N\to\infty}\mu_N(\|h^N-h^{**}\|_\infty\leq\delta)=1-c$, $\forall\delta>0$: 十分小」を「$h^N\to h^*$ と h^{**} の共存」と書く事にする. ただし $\mu_N^{D,\varepsilon,(+)}$, $\mu_N^{F,\varepsilon,(+)}$ を代表して μ_N と書いた.

定理 3. (Dirichlet case) 最小解が 2 つ存在する場合 (i.e. $\Sigma^{D,\varepsilon,(+)}(\hat{h}^{D,(+)})=\Sigma^{D,\varepsilon,(+)}(\bar{h}^{D,(+)})$) を考える. $\mu_N^{D,\varepsilon,(+)}$ の下で, $r=1$ の時 $h^N\to\hat{h}^{D,(+)}$, $r=2$ の時 $h^N\to\bar{h}^{D,(+)}$ と $\hat{h}^{D,(+)}$ の共存, $r\geq 3$ の時 $h^N\to\bar{h}^{D,(+)}$.

定理 4. (Free case) 最小解が 2 つ存在する場合 (i.e. $\Sigma^{F,\varepsilon,(+)}(\hat{h}^{F,(+)})=\Sigma^{F,\varepsilon,(+)}(\bar{h}^{F,(+)})$) を考える. $\mu_N^{F,\varepsilon,(+)}$ の下で, $r=1$ の時 $h^N\to\bar{h}^{F,(+)}$ と $\hat{h}^{F,(+)}$ の共存, $r\geq 2$ の時 $h^N\to\bar{h}^{F,(+)}$.

2. Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers (舟木直久 教授との共同研究)

1 と同様の問題を, より一般のランダムウォークについて論じる. ただし状態空間は $\mathbb{R}^d$ とし, $\mathbb{R}^d_+$ 上の Markov 連鎖は考えない.

D, D_N, $\phi=\{\phi_i\in\mathbb{R}^d,\ i\in D_N\}$, $\{h^N(t),\ t\in D\}$ を 1 で定義したものと同じものとする. また, $\varepsilon\geq 0$, $a,b\in\mathbb{R}^d$, $M=\{0\}$ として $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$ 上の Markov 連鎖の分布を (1), (2) で定義する. ただしハミルトニアンを $H_N(\phi)=-\sum_{i=1}^{N}\log p(\phi_i-\phi_{i-1})$ で与え, p は次の条件を満たすとする.

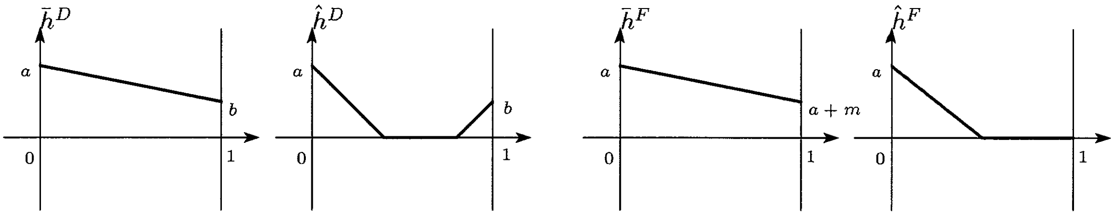
仮定 1. $p : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ は次を満たす. 1. $\int_{\mathbb{R}^d} p(x)\,dx = 1$. 2. $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} e^{\lambda\cdot x}p(x) < \infty$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}^d$. 3. $\Lambda^*(v) \equiv \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d}\{\lambda\cdot v - \Lambda(\lambda)\} < \infty$, $\forall v \in \mathbb{R}^d$. ただし $\Lambda(\lambda) \equiv \log\int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\cdot x}p(x)\,dx$ である. 4. $\Lambda^* \in C^3(\mathbb{R}^d)$.

定理 5. $\mu_N = \mu_N^{D,\varepsilon}$, $\mu_N^{F,\varepsilon}$ の下, $h^N = \{h^N(t),\ t \in D\}$ に対して $N \to \infty$ とした時, $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ 上で速さ N の大偏差原理が成り立つ. (規格化していない) 速さ関数 $\Sigma = \Sigma^{D,\varepsilon}$, $\Sigma^{F,\varepsilon}$ の形は $\Sigma(h) = \int_0^1 \Lambda^*(\dot{h}(t))\,dt - \xi|\{t \in D;\ h(t) = 0\}|$ である. ここで $\xi = \xi^{D,\varepsilon}$, $\xi^{F,\varepsilon}$ は $\varepsilon \geq 0$ に対して定義される free energy と呼ばれる非負の量である.

注意 6. ここでは詳細を述べないが, $\xi^{D,\varepsilon}$, $\xi^{F,\varepsilon}$ に関する詳しい情報も論文の中で述べている.

以下は $d = 1$ の時の $\Sigma(h)$ の最小解の形である.

Dirichlet case　　　　　　　　Free case　　$\xi^{F,\varepsilon} > \Lambda^*(0)$



注意 7. $\xi^{F,\varepsilon} = \Lambda^*(0)$ かつ $t \in [0,1)$ が存在して $a = -tm$ の時は, 連続無限個の最小解がある.

定理 8. (Dirichlet case) 最小解が 2 つ存在する場合 (i.e. $\Sigma^{D,\varepsilon}(\hat{h}^D) = \Sigma^{D,\varepsilon}(\bar{h}^D)$) を考える. $\mu_N^{D,\varepsilon}$ の下で, $d = 1$ の時 $h^N \to \hat{h}^D$, $d = 2$ の時 $h^N \to \bar{h}^D$ と $\hat{h}^D$ の共存, $d \geq 3$ の時 $h^N \to \bar{h}^D$.

定理 9. (Free case) 最小解が 2 つ存在する場合 (i.e. $\Sigma^{F,\varepsilon}(\hat{h}^F) = \Sigma^{F,\varepsilon}(\bar{h}^F)$) を考える. $\mu_N^{F,\varepsilon}$ の下で, $d = 1$ の時 $h^N \to \bar{h}^F$ と $\hat{h}^F$ の共存, $d \geq 2$ の時 $h^N \to \bar{h}^F$.

3. Law of large numbers for Wiener measure with density having two large deviation minimizers

自己ポテンシャルの影響がある 1-次元 Brown 運動を考え, 対応する大偏差原理の速さ関数の最小解が唯一つでない時の大数の法則について考察した.

$D = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = C(D,\mathbb{R})$ とし, $x = \{x(t),\ t \in D\}$ を $x(0) = 0$ であるような Brown 運動とする. $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{C}$ と $N = 1,2,\ldots$ に対して, $h^N(t) = x(t)/\sqrt{N} + a$, $t \in D$ とおく. また, $W = W(r)$ は次の条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の (可測) 関数であるとする:

(C) $\exists A > 0$ s.t. $\lim_{r\to\infty} W(r) = 0$, $\lim_{r\to-\infty} W(r) = -A$ and $-A \leq W(r) \leq 0$ for $\forall r \in \mathbb{R}$.

また, $\mathcal{C}$ 上の分布 $\mu_N(dh) = Z_N^{-1}\exp\left\{-N\int_0^1 W(Nh(t))\,dt\right\}\nu_N(dh)$ を考える. ここで ν_N は h^N の $\mathcal{C}$ 上の法則, Z_N は規格化定数である.

この時, μ_N の下で $\{h^N(t),\ t \in D\}$ に対して $N \to \infty$ とした時, $\mathcal{C}$ 上で速さ N の大偏差原理が成り立つ. (規格化していない) 速さ関数 Σ^W の形は $\Sigma^W(h) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{h}^2(t)\,dt - A\big|\{t \in D;\ h(t) \leq 0\}\big|$ である.

Σ^W の最小解の構造としては, $a \leq 0$ または $a > \sqrt{2A}$ の時 Σ^W の最小解は $\bar{h} \equiv a$ になり, $0 < a \leq \sqrt{2A}$ の時 Σ^W の最小解 $\hat{h}$ は上の図の $\hat{h}^F$ のようになる. ただし h が 0 に交わる座標は $a/\sqrt{2A}$ である.

定理 10. 条件 (C) と $\Sigma^W(\bar{h}) = \Sigma^W(\hat{h})$ を仮定する. さらに, ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $r \geq K$ に対して $W(r) = 0$ を仮定すると, $h^N \to \bar{h}$.

定理 11. 条件 (C) と $\Sigma^W(\bar{h}) = \Sigma^W(\hat{h})$ を仮定する. さらに, 以下の 3 条件

$$
\begin{aligned}
&{}^{\exists}\lambda_1, \alpha_1 > 0 \text{ s.t. } W(r) \sim -\lambda_1 r^{-\alpha_1} \text{ as } r \to \infty, \\
&{}^{\exists}\lambda_2, \alpha_2 > 0 \text{ s.t. } W(r) \leq -A + \lambda_2 |r|^{-\alpha_2} \text{ as } r \to -\infty, \\
&0 < \alpha_1 < \min\{\alpha_2/(\alpha_2+1), \alpha_2/2\} \text{ and } \int_0^{a/\sqrt{2A}} \hat{h}(t)^{-\alpha_1}\, dt > \int_0^1 \bar{h}(t)^{-\alpha_1}\, dt,
\end{aligned}
$$

を仮定すると, $h^N \to \hat{h}$.

4. Large deviations for the $\nabla\varphi$ interface model with self potentials

自己ポテンシャルがある $\nabla\varphi$ 界面モデルに対する大偏差原理を考察した.

D を $\mathbb{R}^d$ 内で境界が区分的に Lipschitz 連続な有界領域とし, $D_N = ND \cap \mathbb{Z}^d$, $\partial^+ D_N = \{x \notin D_N;\ |x-y| = 1,\ \exists y \in D_N\}$, $\overline{D_N} = D_N \cup \partial^+ D_N$ とおき, D_N 上の微視的なレベルの界面を $\phi = \{\phi(x),\ x \in D_N\} \in \mathbb{R}^{D_N}$ で表わす. 相互ポテンシャル $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 自己ポテンシャル $S : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 境界条件 $\psi = \{\psi(x),\ x \in \partial^+ D_N\} \in \mathbb{R}^{\partial^+ D_N}$ を持つ D_N 上の界面のエネルギーを

$$
H_N^{\psi,S}(\phi) = \sum_{x,y \in \overline{D_N}, |x-y|=1} V((\phi \vee \psi)(x) - (\phi \vee \psi)(y)) + \sum_{x \in D_N} S\left(\frac{x}{N}, \frac{1}{N}\phi(x), \phi(x)\right)
$$

で定義する. ただし $\phi \vee \psi$ は D_N 上で ϕ, $\partial^+ D_N$ 上で ψ に一致する $\overline{D_N}$ 上の界面の配置を表わす. 相互ポテンシャル $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^2, 偶かつある定数 $c_-, c_+ > 0$ が存在して任意の $\eta \in \mathbb{R}$ に対して $c_- \leq V''(\eta) \leq c_+$ を満たすとする. また自己ポテンシャル $S(\theta, s, r) \equiv Q(\theta, s) W(r)$, $Q : D \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下の条件を満たすとする.

(Q) Q は非負, 有界かつ区分的に連続で $|Q(\theta, s) - Q(\theta, s')| \leq c(\theta)|s - s'|$ を満たす. ここで $c : D \to [0, \infty)$ は $\|c\|_{L^2(D)} < \infty$.

(W) W は可測で極限 $\alpha = \lim_{r \to +\infty} W(r)$, $\beta = \lim_{r \to -\infty} W(r)$ が存在し, $\gamma = \sup_{r \in \mathbb{R}} W(r) < \infty$ かつ任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $W(r) \geq \alpha \wedge \beta$.

また, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し $g|_{\partial D}$ を巨視的な境界条件とし, 微視的レベルでの境界条件 $\psi \in \mathbb{R}^{\partial^+ D_N}$ は ある $C > 0$ と $p_0 > 2$ が存在して $\sum_{x \in \partial^+ D_N} \left|\psi(x) - Ng\left(\frac{x}{N}\right)\right|^{p_0} \leq CN^d$ を満たし, さらに $\max_{x \in \partial^+ D_N} |\psi(x)| \leq CN$ を満たすとする.

対応する $\mathbb{R}^{D_N}$ 上の有限 Gibbs 測度は $\mu_N^{\psi,S}(d\phi) = (Z_N^{\psi,S})^{-1} \exp\{-H_N^{\psi,S}(\phi)\} \prod_{x \in D_N} d\phi(x)$ で定義される. ここで $Z_N^{\psi,S}$ は規格化定数である.

また, 巨視的な高さ変数 $\{h^N(\theta),\ \theta \in D\}$ を微視的な高さ変数を x-方向, ϕ-方向共に $1/N$ 倍にスケール変換して得られる $h^N\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{1}{N}\phi(x)$, $x \in D_N$ の多重線形補間 (一種の折れ線近似) として定義する. この時, 次の定理が成立する.

定理 12. $\mu_N^{\psi,S}$ の下, 巨視的な高さ変数 $\{h^N(\theta),\ \theta \in D\}$ に対して $N \to \infty$ とした時, $L^2(D)$ 上で速さ N^d の大偏差原理が成り立つ. (規格化していない) 速さ関数 Σ^S は次で与えられる.

$$
\Sigma^S(h) = \int_D \sigma(\nabla h(\theta))\, d\theta + \int_D Q(\theta, h(\theta)) \left(\alpha 1_{\{h(\theta)>0\}} + \beta 1_{\{h(\theta)<0\}} + (\alpha \wedge \beta) 1_{\{h(\theta)=0\}}\right) d\theta.
$$

ここで $\sigma(v)$ は表面張力と呼ばれる巨視的な量であり, ポテンシャル V から定まる.