論文の内容の要旨

論文題目 Short time asymptotic behavior and large deviations for Brownian motion on scale irregular Sierpinski gaskets
（非正規なシェルピンスキーガスケット上のブラウン運動に対する熱核の短時間漸近挙動と大偏差原理）

氏　名　野田 秀明

本論文では不規則な自己相似性を持つ図形の一つである scale irregular Sierpinski gasket (以下 SISG) と呼ばれる図形の上の拡散過程を扱う．2 より大きい任意の自然数 N に対して N 次元 SISG を考えることができるが簡単のため本論文では $N=2$ の場合のみを対象とする．図 1 にあるように, 正三角形の各辺を 2 分割して下向きの三角形を 1 つ取り除き, 残った正三角形各々に同様の操作を行うことを無限回繰り返してできる図形が Sierpinski gasket であり, SG(2) で表すことにする．同様に図 2 のように各辺を 3 分割して下向きの三角形を 3 つ取り除くという操作を上と同じように繰り返すことによって得られる図形を SG(3) で表すことにする．同様にして 4 より大きい自然数 m に対しても各辺を m 分割して作られる図形 SG(m) を考えることができる．A を 2 より大きい自然数の有限部分集合とする．$\eta \in A^{\mathbb{N}}$ に関する SISG とは, 正三角形の各辺を η_1 分割して下向きの三角形を取り除き, 残った正三角形各々の各辺を η_2 分割して下向きの三角形を取り除く, といった操作を η に従って無限回繰り返してできる図形である．ここでは最も単純な場合, つまり $A=\{2,3\}$ のときを考える．図 3 は $\eta=(2,3,2,2,3\dots)\in\{2,3\}^{\mathbb{N}}$ に対する SISG である．

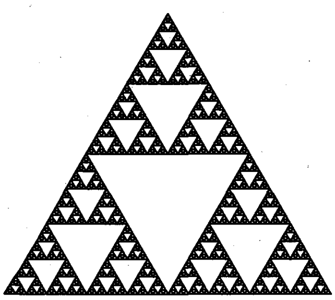
図 1: SG(2)

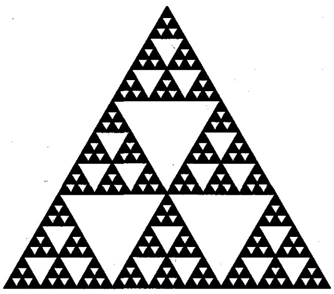
図 2: SG(3)

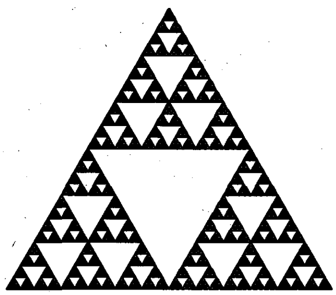
図 3: SISG の一例

本論文では SISG 上の Brown 運動と呼ぶにふさわしい拡散過程の熱核の短時間での漸近挙動と Schilder 型の大偏差原理について考察する．対応する事柄を多様体の場合と Sierpinski gasket

の場合で述べておく．リーマン多様体上 M の熱核 $p_t^M(x,y)$ の時間零への漸近挙動については Varadhan による次の結果 [V] が著名である: 任意の $x,y \in M$ に対して

$$\lim_{t\to 0} t\log p_t^M(x,y) = -\frac{\rho(x,y)^2}{2}. \tag{1}$$

ここで ρ はリーマン距離とする．また Schilder [Sc] はユークリッド空間の上の Brown 運動 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ に対して次の大偏差原理を証明した．$x \in \mathbb{R}^d$ を一つ定める．P_x を x 出発の $C([0,1]\to\mathbb{R}^d)$ 上の Wiener 測度とする．任意の閉集合 $C \subset \{\omega \in C([0,1]\to\mathbb{R}^d) : \omega(0)=x\}$ と開集合 G に対して

$$-\inf_{\phi\in G} I(\phi) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P_x[B_{\varepsilon\cdot} \in G], \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\log P_x[B_{\varepsilon\cdot}\in C] \leq -\inf_{\phi\in C} I(\phi)$$

が成り立つ．ただし

$$I(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |\phi'(t)|^2 dt, & \phi \text{ が絶対連続のとき} \\ \infty & \text{その他のとき.} \end{cases} \tag{2}$$

I はレート関数と呼ばれ，連続関数 ϕ のエネルギーを表す量と捉えることができる．この定理は Brown 運動に関する 1 つの大偏差原理であり，それは Strassen の関数型重複大数の法則に応用されたり，確率微分方程式を通して一般の多次元拡散過程の大偏差原理を導くことに用いられたりする重要な定理である．この定理の証明はいくつか知られているが Varadhan による熱核の短時間漸近挙動 (1) を用いた方法がある．SG(2) 上の Brown 運動 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の熱核 $p_t(x,y)$ に対しては Kumagai [Kum] によって

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n z\right)^{1/(d_w-1)} \log p_{(\frac{2}{5})^n z}(x,y) = -d(x,y)^{d_w/(d_w-1)} F\left(\frac{z}{d(x,y)}\right) \tag{3}$$

が成り立つことが示された．ここで $d_w = 2.321928\ldots$, $z\in[2/5,1]$, d は SG(2) 上の固有の距離であり F は Brown 運動 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ のある hitting time のラプラス変換から導かれる関数のルジャンドル変換として決まる $F(5y/2)=F(y)$, $y>0$ を満たす定数ではない連続な正の周期関数である．また有界な関数 H をどのように選んでも $\lim_{t\to 0} H(t)t^{1/(d_w-1)}\log p_t(x,y)$ が存在しないこともわかっている．SG(2) 上の Brown 運動は時刻 t において出発点から平均 t^{1/d_w} の定数倍の距離にいることが知られており，このことから d_w は粒子の拡散の速さを示す量であるということができる．ユークリッド空間上の Brown 運動の場合 d_w に対応する量は 2 である．その後 Ben-Arous と Kumagai [BK] は熱核の短時間漸近挙動を使って，次に挙げる Schilder 型大偏差原理を示した．$x\in$ SG(2) を一つ定める．任意の閉集合 $C\subset C_x([0,1]\to \mathrm{SG}(2)) = \{\omega\in C([0,1]\to\mathrm{SG}(2)) : \omega(0)=x\}$ と開集合 G に対して

$$\begin{aligned} -\inf_{\phi\in G} I_{x,z}(\phi) &\leq \liminf_{n\to\infty} \varepsilon_{n,z}^{1/(d_w-1)} \log P_x[X_{\varepsilon_{n,z}\cdot}\in G], \\ &\limsup_{n\to 0} \varepsilon_{n,z}^{1/(d_w-1)} \log P_x[X_{\varepsilon_{n,z}\cdot}\in C] \leq -\inf_{\phi\in C} I_{x,z}(\phi) \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon_{n,z}=(2/5)^n z$ であり $\{I_{x,z}\}_{z\in[2/5,1]}$ は $\phi\in C_x([0,1]\to\mathrm{SG}(2))$ に対して

$$I_{x,z}(\phi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 D\phi(t)^{d_w/(d_w-1)} F\left(\frac{z}{D\phi(t)}\right) dt, & \phi \text{ が絶対連続のとき} \\ \infty & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義されるレート関数の族である．ただし $D\phi(t) = \lim_{s\to t} d(\phi(s),\phi(t))/|s-t|$, $t>0$ とする．このことは Sierpinski gasket 上では Schilder 型の大偏差原理は $\varepsilon\to 0$ については成立しないが，各 z について列 $\varepsilon_{n,z}$ で $n\to\infty$ とするときには成立する，ということを意味している．

本論文では上記の内容が SISG 上の Brown 運動に対してはどのようになるのか, について考察した. 第 2 章ではまず SISG の明確な定義とその上の Brown 運動の構成を簡単に述べる. 次に SG(2) の場合の F に対応する関数を構成し, その性質を調べた後に熱核の短時間漸近挙動を述べる. SG(2) との違いは, 完全な自己相似性がないために d_w と F に対応する量が (3) でいうところの n に依存する形となることである. 第 3 章ではレート関数を定義し, SISG 上の path 空間の上の測度の族について Schilder 型の大偏差原理についての考察を行うが SG(2) の場合で得られたような形の大偏差原理には至っておらず弱い形でしか得られていない. F に対応する関数が n に依存することから, レート関数も (4) でいうところの n に依存することになり, このことが上手くいかないことの原因となっている. この章では対象としている測度の族が大偏差原理の理論では重要な exponentially tight を満たすことも示す. SG(2) の場合にこのことを述べておく. これは大偏差原理の一般論 (ここでの一般論とは例えば [DZ] の第 4 章) より (4) からただちに得られるものである. 測度の族 $\{P_x \circ X^{-1}_{\varepsilon_{n,z}\cdot}\}_{n\in\mathbb{N},z\in[2/5,1]}$ が exponentially tight であるとは任意の $L>0$ に対して, あるコンパクト集合 $K \subset C_x([0,1]\to \mathrm{SG}(2))$ があって

$$\limsup_{n\to 0}\sup_{z\in[2/5,1]} \varepsilon_{n,z}^{1/(d_w-1)}\log P_x[X_{\varepsilon_{n,z}\cdot}\in K]\le -L$$

を満たすことである. また第 3 章では (4) のような大偏差原理は求まってないものの, 弱い形の大偏差原理より Varadhan の定理に対応するものを示す. SG(2) の場合にこの Varadhan の 定理がどのようなものかを挙げておく. $\Phi : C_x([0,1]\to \mathrm{SG}(2))\to\mathbb{R}$ を有界な連続関数とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{n,z}^{1/(d_w-1)}\log E_x\Big[\exp\Big(\frac{\Phi(\omega(\varepsilon_{n,z}\ \cdot\ ))}{\varepsilon_{n,z}^{1/(d_w-1)}}\Big)\Big]=\sup_{\phi\in C_x([0,1]\to\mathrm{SG}(2))}(\Phi(\phi)-I_{x,z}(\phi))$$

が成り立つ. これも大偏差原理の一般論より (4) からただちに得られる. Euclid 空間上で対応するものは SG(2) を $\mathbb{R}^d$, d_w を 2, $\varepsilon_{n,z}$ を ε, レート関数を (2) でおきかえて $\varepsilon\to 0$ とすればよい. 実は一般論として exponentially tightness と Varadhan の定理は大偏差原理 (4) と同値であることが知られている. 本論文では SISG の上の Brown 運動に関して弱い形の大偏差原理を導出し, exponentially tightness と Varadhan の定理に対応するものを示すことができた. このことからより良い大偏差原理も成り立つことが期待される. なおレート関数が一つの定まった関数でないこと等から, 本論文で扱ったケースは一般論の枠組みに入らないことを注意しておく.

参考文献

[BK] G.Ben Arous and T. Kumagai, Large deviations for Brownian motion on the Sierpinski gasket. In: *Stochastic Process. Appl.* **85** 2000. 225-235.

[DZ] A.Dembo and O.Zeitouni, Large Deviations and Applications, 2nd ed. *Springer-Verlag* (1998).

[Kum] T. Kumagai, Short time asymptotic behaviour and large deviation for Brownian motion on some affine nested fractals. In: *Publ. R.I.M.S Kyoto Univ.* **33** , *Kyoto Univ* 1997. 26-55.

[Sc] M.Schilder, Some asymptotic formulae for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **125** (1966), 63-85.

[V] S.Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Commu. Pure Appl. Math.* **20** (1967), 431-455.