論文審査の結果の要旨

氏名　野田 秀明

本論文は、非正規なシェルピンスキーガスケット上のブラウン運動に対する熱核の短時間漸近挙動とシルダー型大偏差原理について論じたものである。

シェルピンスキーガスケットは通常２次元ユークリッド空間内の正三角形に対して３つの頂点を中心とする３つの 1/2 縮小相似変換の不動集合として与えられ、自己相似性を持つ。しかし、これに代わり、６つの 1/3 縮小相似変換の不動集合として同様な自己相似性を持つフラクタル図形を定義することもできる。一方、さらに複雑な図形として $\{2,3\}^{\mathbf{N}}$ の元 η に対して各段階の縮小相似写像の族として、η の第 n 成分 η_n に応じて第 n ステップを３つの 1/2 縮小相似変換、または６つの 1/3 縮小相似変換を選ぶという方法で２次元ユークリッド空間内のフラクタル図形、非正規なシェルピンスキーガスケット（以下 IRSG と呼び F^η と表記する)、を定義できる。この図形はもはや自己相似性を持たない。本論文では IRSG 上の Brown 運動と呼ぶにふさわしい拡散過程の熱核の短時間での漸近挙動とシルダー型の大偏差原理について考察している。

まず各 $\eta \in \{2,3\}^{\mathbf{N}}$ 毎に具体的に定められる第 n 階空間スケール $B_n(\eta)$, 第 n 階面積スケール $M_n(\eta)$, 第 n 階時間スケール $M_n(\eta)$, を定義し、ランダムウォーク次元 $d_w^\eta(n)$, スペクトル次元 $d_s^\eta(n)$ を

$$d_w^\eta(n) = \frac{\log T_n(\eta)}{\log B_n(\eta)}, \qquad d_s^\eta(n) = 2\frac{\log M_n(\eta)}{\log T_n(\eta)}$$

で定義する。ランダムウォーク次元やスペクトル次元は通常のシェルピンスキーガスケットでは定数となる。さらに F^η 上の自然な距離から定まる距離関数を d_η で表すことにする。

これらの準備の下に、ある関数方程式から一意に定まる連続関数 $\Psi : [0,\infty) \times \{2,3\}^{\mathbf{Z}}$ を与え（第２章 2.3 節)、$\Psi^* : [0,\infty) \times \{2,3\}^{\mathbf{Z}}$ を、そのルジャンドル変換として定義している。この関数は通常のシェルピンスキーガスケットではある種の周期関数となる。

Barlow-Hambly (1997) が、時間スケール $T_n(\eta)$ を用いて IRSG F^η 上に自然な拡散過程を構成し、その推移確率がハウスドルフ測度に関して絶対連続であることを示し、さらにその密度関数（熱核）$P^\eta(t,x,y)$ に対する上と下からの評価を与えた。

この論文では、この熱核に対して短時間の漸近挙動として以下の定理を示した。

定理 1 任意の $b > a > 0$ に対して

$$\sup_{\eta \in \{2,3\}^{\mathbf{N}}} \sup_{x,y \in F^\eta, s \in [a,b]} |(\frac{B_n(\eta)}{T_n(\eta)})^{\gamma_n(\eta)} \log p^\eta(\frac{B_n(\eta)}{T_n(\eta)} s, x, y) - d_\eta(x,y)\Psi^*(\frac{s}{d_\eta(x,y)}, \theta_n \eta^*)| \to 0,$$

が $n \to \infty$ の時成り立つ。ただし、 $\gamma_n = 1/(d_w^\eta(n) - 1)$, $\theta : \{2,3\}^{\mathbf{Z}} \to \{2,3\}^{\mathbf{Z}}$ はシフト作用素である。また、 η^* は

$$\eta^*(k) = \begin{cases} 2, & k \leqq 0, \\ \eta_k, & k \geqq 1, \end{cases}$$

により定義される $\{2,3\}^{\mathbf{Z}}$ の元である。

この定理は普通の熱核に対する Varadhan 評価に対応しており、シェルピンスキーカーペットの場合の熊谷 (1997) の結果の拡張となっている。

さらに論文ではシルダー型の大偏差原理を調べている。$\phi:[0,1]\to F^{\eta}$ が絶対連続であるとき、

$$D_{\eta}\phi(t)=\lim_{s\to t}\frac{d_{\eta}(\phi(s),\phi(t))}{|t-s|}$$

が $a.e.t\in(0,1)$ に対して存在する。

関数 $I_s^{\eta}:C([0,1];\mathbf{R}^2)\times\{2,3\}^{\mathbf{Z}}\to[0,\infty]$, $\eta\in\{2,3\}^{\mathbf{N}}$, $s>0$, を

$$I_s^{\eta}(\phi)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 D_{\eta}\phi(t)\Psi^*(\frac{s}{D_{\eta}\phi(t)},\xi)dt, & \phi \text{ が絶対連続で } \phi([0,1])\subset F^{\eta} \text{ のとき}\\ \infty, & \text{その他のとき,}\end{cases}$$

により定義する。

この時、以下のような定理を示した。

定理 2 任意の有界連続関数 $\Phi:C([0,1];\mathbf{R}^2)\to\mathbf{R}$ 及び $b>a>0$ に対して

$$\sup_{\eta\in\{2,3\}^{\mathbf{N}}}\sup_{s\in[a,b]}\frac{1}{B_n(\eta)}\log E^{P_x^{\eta}}[\exp(B_n(\eta)\Phi(w(\frac{B_n(\eta)s}{T_n(\eta)}\cdot)]$$
$$-\sup\{\Phi(\phi)-I_s^{\eta}(\phi;\theta^n\eta^*);\phi\in C([0,1];\mathbf{R}^2),\ \phi(0)=x\}|\ \to 0,$$

が $n\to\infty$ の時に成り立つ。

また、exponential tightness と呼ばれる性質も示している。

これはシルダー型大偏差原理の言い換えの一つとなっており、熊谷-Hambly(2003) の結果の拡張となっている。

このように本論文では非正規なシェルピンスキーガスケットにおいて, 複雑な形ではあるけれども、時間がゼロに収束するときの熱核の漸近挙動や大偏差原理をパラメータに関して一様な形で示すことに成功しており、確率過程論の観点から高く評価できるものである。

よって、論文提出者　野田　秀明　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。