

# 論文の内容の要旨

論文題目:

**Inverse Problems Related with Non-Symmetric Operators and Inverse Problem for One-dimensional Fractional Partial Differential Equation.**

(非対称作用素に関する逆問題と1次元非整数階偏微分方程式に関する逆問題)

氏名 山崎智裕

本学位申請論文において、摩擦を伴う振動や伝送線などの電流・電圧を記述する際に現れる非対称な常微分作用素に関する係数による逆散乱問題や1階の非対称双曲型方程式に関する逆問題、さらに1次元非整数階偏微分方程式の係数ならびに階数を境界における観測データから決定する逆問題に対して一意性を証明した。

## 1 非対称作用素の逆散乱問題について

$$A_P u = B \frac{du}{dx} + P(x)u = \lambda u \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.1)$$

という方程式を考える。ここで

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) \end{pmatrix}$$

とする。さらに  $P_{jk} \in C_0^1(\mathbf{R})$  とし、 $\{L^2(\mathbf{R})\}$  における作用素  $A_P$  は

$$\begin{cases} D(A_P) = \{H^1(\mathbf{R})\}^2, \\ A_P u = B \frac{du}{dx} + P(x)u. \end{cases} \quad (1.2)$$

で定められているとしておく。  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  となる  $\lambda \in \mathbf{R}$  に対し  $\varphi^{(+)}(x, \lambda), \varphi^{(-)}(x, \lambda), \psi^{(+)}(x, \lambda), \psi^{(-)}(x, \lambda)$  を (1.1) の解で

$$\varphi^{(+)}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} e^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} e^{-\lambda x} \\ -e^{-\lambda x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

$$\psi^{(+)}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} e^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \quad \psi^{(-)}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} e^{-\lambda x} \\ -e^{-\lambda x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.4)$$

を満たすものと定義する。これらの解のことを Jost 解と呼ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)}(x, \lambda) &= \alpha^{(1)}(\lambda)\psi^{(+)}(x, \lambda) + \beta^{(1)}(\lambda)\psi^{(-)}(x, \lambda), & \varphi^{(-)}(x, \lambda) &= \alpha^{(2)}(\lambda)\psi^{(+)}(x, \lambda) + \beta^{(2)}(\lambda)\psi^{(-)}(x, \lambda), \\ \psi^{(+)}(x, \lambda) &= \alpha^{(3)}(\lambda)\varphi^{(+)}(x, \lambda) + \beta^{(3)}(\lambda)\varphi^{(-)}(x, \lambda), & \psi^{(-)}(x, \lambda) &= \alpha^{(4)}(\lambda)\varphi^{(+)}(x, \lambda) + \beta^{(4)}(\lambda)\varphi^{(-)}(x, \lambda), \end{aligned}$$

となるような  $\alpha^{(j)}(\lambda), \beta^{(j)}(\lambda)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  が存在することを示すことができる. この  $\alpha^{(j)}(\lambda), \beta^{(j)}(\lambda)$  を散乱係数と呼ぶことにする.

このとき以下のような逆問題を考える.

係数による逆散乱問題: 散乱係数  $\alpha^{(j)}(\lambda), \beta^{(j)}(\lambda)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) から係数行列  $P(x)$  を求めよ.

対称な常微分作用素に関する逆散乱問題は V.A. Marchenko らをはじめとして先駆的な研究が数多くあるが、非対称作用素に関しては研究結果が極度に少ない。学位申請論文の第 1 部において、このような逆問題における一意性について研究した。

この逆問題に関して一意性は一般には成り立たないが、主定理として、散乱係数が一致するような係数行列の満たすべき必要十分条件を積分方程式の形で導いた。

主定理における積分方程式を用いると、系として、例えば、係数行列の 2 行目が既知の場合に 1 行目を決定する逆問題についての一意性が成立することを示すことができる。

なお、付随する順問題の結果として、散乱係数の漸近挙動に関する結果や、作用素  $A_P$  のスペクトルの分布に関する結果も得た。

## 2 1 階の双曲型方程式に関する逆問題について

以下の初期値境界値問題を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = B_4 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + P(x)u(t, x) \quad -T < t < T, \quad 0 < x < 1 \quad (2.1)$$

$$u_{j+2}(t, 0) = h_j u_j(t, 0), \quad j = 1, 2, \quad -T \leq t \leq T \quad (2.2)$$

$$u_{j+2}(t, 1) = H_j u_j(t, 1), \quad j = 1, 2, \quad -T \leq t \leq T \quad (2.3)$$

$$u(0, x) = a(x) \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.4)$$

ここで  $h_j, H_j \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $j = 1, 2$  とする.  $u(t, x)$  は 4 次元ベクトル関数である. 係数  $P(x)$  は 4 行 4 列の行列関数で初期値  $a(x)$  は 4 次元ベクトル関数である. また  $E_2$  を  $2 \times 2$  の単位行列として、 $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$  とおく. この初期値境界値問題の解を  $u_{P,a}(t, x)$  と書く.

この問題に対し以下の逆問題を考える.

逆問題: 2 点  $x = 0, 1$  における境界データ  $u(t, 0), u(t, 1)$ ,  $-T \leq t \leq T$  から係数行列  $P(x)$  と初期条件  $a(x)$  を求めよ.

学位論文の第 2 部ではこの逆問題の一意性を考えた. 一般にはこの逆問題の一意性は成立しない. そこで

$$M_T(P, a) \equiv \{(Q, b) \in \{C^1[0, 1]\}^{20}; u_{Q,b}(t, 0) = u_{P,a}(t, 0), \quad u_{Q,b}(t, 1) = u_{P,a}(t, 1) \quad -T < t < T\}$$

を考えた. この集合は,  $u_{Q,b}$  の境界値が係数行列が  $P(x)$  で初期値が  $a(x)$  であるときの境界値と同じになるような係数行列  $Q$  と初期条件  $b$  の組全体である.

$\{L_2(0, 1)\}^4$  から  $\{L_2(0, 1)\}^4$  への作用素  $A_P$  を

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_P u)(x) = B_4 \frac{du}{dx}(x) + P(x)u(x), \quad 0 < x < 1 \\ D(A_P) = \{u \in \{H^1(0, 1)\}^4; u_{j+2}(0) - h_j u_j(0) = 0, \quad u_{j+2}(1) - H_j u_j(1) = 0, \quad j = 1, 2\} \end{array} \right.$$

で定義する．学位申請論文の第 2 部の主定理では、この作用素  $A_P$  について、(i) 固有空間の次元が 1 であること、(ii) 無限遠方において異なる固有値間の距離がある定数  $c > 0$  より大きいこと、(iii) 共役作用素  $A_P^*$  の任意の固有関数と初期条件  $a$  が直交しないこと、(iv)  $T \geq 2$ 、という仮定のもとに、集合  $M_T(P, a)$  を  $P, Q$  に関する常微分方程式と  $a$  によって特徴付けた．主定理により、係数行列の一部の成分（たとえば 1 行目のみ）に関しての一意性の結果を得ることができる．また、証明に当たって作用素  $A_P$  の固有値の漸近挙動に関する結果や、固有関数が基底をなすことを証明した．

### 3 1 次元非整数階偏微分方程式に関する逆問題

$$\partial_t^\alpha u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) = 0 \quad 0 < t \leq T, 0 < x < \ell, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(\ell, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.3)$$

という系を考える．ここで  $p \in C^2[0, \ell]$ ,  $0 < \alpha < 1$  であり、 $D_t^\alpha u(x, t)$  は Caputo 導関数：

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) d\tau.$$

を表す．また  $\delta$  はディラックのデルタ関数である．方程式 (3.1) は  $\alpha = 1$  に対応する古典的な拡散方程式より一般的な媒質における拡散を表しており、 $\alpha$  は一般化された拡散の階数であり、 $p(x)$  は拡散係数を記述している．

この系に対し以下の逆問題を考える．

逆問題：1 点  $x = 0$  における境界データ  $u(0, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  から時間微分の階数  $\alpha$  と係数関数  $p$  を求めよ．

学位申請論文第 3 部ではこの逆問題の一意性を考えた．

(3.2) はディラックのデルタ関数を含むので、(3.1) – (3.3) の系を考えるに当たり、弱解の定義が必要となる．そのために関数空間の準備を行う．以下の作用素  $A_p$  を考える．

$$(A_p \psi)(x) = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \psi(x) \right), \quad 0 < x < \ell,$$

$$D(A_p) = \left\{ \psi \in H^2(0, \ell); \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\ell) = 0 \right\}.$$

この  $A_p$  は重複度が 1 である固有値  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  を持っており、適当な番号付けにより  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$  とすることができ、しかも漸近挙動として

$$\lambda_n = \left( \int_0^\ell \frac{1}{\sqrt{p(x)}} dx \right)^{-2} n^2 \pi^2 + O(1), \quad n \rightarrow \infty$$

が得られる． $\varphi_n$  を  $\lambda_n$  に対応する  $A_p$  の固有関数で  $\varphi_n(0) = 1$  を満たすものとする、任意の  $\psi \in L^2(0, \ell)$  に対し固有関数展開が成り立つ： $\psi = \sum_{n=1}^\infty \rho_n(\psi, \varphi_n) \varphi_n$ ．ここで  $(\cdot, \cdot)$  は  $L^2(0, \ell)$  における内積で、 $\rho_n := (\varphi_n, \varphi_n)^{-1}$  である．この  $\rho_n$  については漸近挙動  $\rho_n = c_0 + o(1)$  ( $c_0$  は正の定数) が成り立つ．

さて、定数  $M > 0$  を任意にとり、作用素  $A_{p,M}$  を

$$\begin{cases} (A_{p,M}\psi)(x) = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \psi(x) \right) + M\psi, & 0 < x < \ell, \\ D(A_{p,M}) = \left\{ \psi \in H^2(0, \ell); \frac{d\psi}{dx}(0) = \frac{d\psi}{dx}(\ell) = 0 \right\} \end{cases}$$

と定義し、その固有値を  $\{\lambda_n^{(M)}\}$  と書くと、 $\lambda_n^{(M)} = \lambda_n + M$  となる。したがって  $\lambda_n^{(M)} > 0, n \in \mathbf{N}$  が成り立つ。

任意の  $\kappa > 0$  に対して関数空間  $D(A_{p,M}^\kappa)$  を

$$D(A_{p,M}^\kappa) = \left\{ \psi \in L^2(0, \ell); \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\lambda_n^{(M)}|^{2\kappa} |\langle \psi, \varphi_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

と定めるとこの空間はノルム  $\|\psi\|_{D(A_{p,M}^\kappa)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\lambda_n^{(M)}|^{2\kappa} |\langle \psi, \varphi_n \rangle|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$  について Banach 空間となる。さらに  $D(A_{p,M}^{-\kappa})$  を  $D(A_{p,M}^\kappa)$  上の有界線型汎関数全体とし  $f \in D(A_{p,M}^{-\kappa}), \psi \in D(A_{p,M}^\kappa)$  に対し  $f$  を  $\psi$  に作用させたものを

$$-\kappa < f, \psi > \kappa$$

と書くことにする。いま  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  を固定し、 $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\frac{1}{4} - \epsilon < \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{4} + \epsilon}$  と書くことにする。

以下の (3.4) – (3.6) が満たされるとき  $u(p, \alpha)(x, t)$  は (3.1) – (3.3) の弱解であるという:

$$\begin{cases} u(\cdot, t) \in L^2(0, \ell), & 0 < t \leq T, \\ u \in C([0, T]; D(A_{p,M}^{-\frac{1}{4}-\epsilon})), \\ \frac{\partial}{\partial t} u, \partial_t^\alpha u, A_{p,M} u \in C((0, T]; D(A_{p,M}^{-\frac{1}{4}-\epsilon})), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - \delta\|_{D(A_{p,M}^{-\frac{1}{4}-\epsilon})} = 0, \quad (3.5)$$

$$\langle \partial_t^\alpha u(\cdot, t), \psi \rangle + \langle u(\cdot, t), A_p \psi \rangle = 0, \quad t \in (0, T], \psi \in D(A_p). \quad (3.6)$$

第 3 部の主要定理は以下のように述べることができる:

定理 ( 1 次元非整数階偏微分方程式に関する逆問題の一意性 )

$T > 0$  を任意に固定し、 $p, q \in C^2[0, \ell], [0, \ell]$  で  $p, q > 0$  かつ  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  とする。そのとき、 $u(p, \alpha)(0, t) = u(q, \beta)(0, t), 0 < t < T$  ならば  $\alpha = \beta, p(x) = q(x), 0 \leq x \leq \ell$  である。