

論文審査の結果の要旨

氏名： 山崎智裕

山崎智裕氏は、学位申請論文において摩擦を伴う振動や伝送線などの電流・電圧を記述する際に現れる非対称な常微分作用素系に関する逆散乱問題や 1 階の非対称双曲型方程式に関する逆問題、さらに 1 次元非整数階偏微分方程式の係数ならびに階数を境界における観測データから決定する逆問題に対して一意性を証明した。実軸上のシュレンディガー方程式やディラック方程式など対称な常微分作用素の逆散乱問題に対しては、マルチェンコによる先駆的な研究を初めとして、一意性については再構成のアルゴリズムも含めて極めて多くの結果が知られているが、作用素が自己共役でないだけでなく、もともと形式的にも対称ではないシステムの場合の逆散乱問題の一意性はほとんどなく、山崎氏の結果はそのような方面での最初期の数学的な成果である。

第一部において、次のような実軸上の非対称な常微分作用素に対して逆散乱問題を定式化しその一意性を確立した：

$$A_P u = B \frac{du}{dx} + P(x)u = \lambda u \quad x \in \mathbf{R},$$

ただし、

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) \end{pmatrix}$$

とし、 $P_{jk} \in C_0^1(\mathbf{R})$ とし、 $L^2(\mathbf{R})^2$ における作用素 A_P は定義域を $D(A_P) = H^1(\mathbf{R})^2$ とし定義されている。適切な λ に対し、無限遠方で指数関数に漸近するような解のシステムを定め、それらの解の間の線形変換式の係数を λ の関数として考えて、そのような関数から係数行列を決定する問題を考察した。線形変換式は、実軸上のシュレンディガー方程式の場合の散乱係数に対応するものであり、ここで考えられた逆問題は実軸上のシュレンディガー方程式の逆散乱問題に相当するものである。第一部での山崎氏の主要結果は同一の散乱係数を与える係数行列を特徴付けである。それをを用いると、散乱係数から 2×2 の係数行列のうち例えば一行目の 2 つの成分のみを一通りに決定できるといった系を容易に導くことができる。証明のためには、非対称作用素のスペクトルの性質を明らかにすることや、レヴィタン以来のロシア学派の方法論である変換公式を非対称な作用素に確立することが必要であり、手法的にも注目すべきものがある。

第二部において 1 階の双曲型方程式に関する逆問題における一意性について考察した。すなわち、4 成分の空間次元が 1 である双曲系の初期・境界値問題を考えて、境界点の解の時間方向の観測から 16 個の係数を特徴づける条件を導出した。4 成分の双曲系の初期・境界値問題は、例えば 2 本の伝送線などの電圧・電流の時間変化に関する支配方程式である。定常部分の作用素のスペクトラムの漸近形などの性質がスツルム・リウビル問題や、すでに逆問題の結果がトルシン・山本らに証明されている 2 成分の場合と根本的に異なっており、解析も格段に困難である。山崎氏は、このような 4 成分の場合に既存の結果を拡張した。

最後に第三部において1次元非整数 α 階の拡散方程式を考えて、ディラックのデルタ関数を初期値にもつような解に関する逆問題の一意性を証明した。ここで、 $0 < \alpha < 1$ として、非整数階微分は

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) d\tau.$$

で定義されており、非整数階の拡散方程式は $\alpha = 1$ に対応する古典的な拡散方程式より一般的な媒質における拡散を表している。主要結果は、端点における解の時間変化によって、 α と空間変数に依存する拡散係数を同時に一通りに決定できることを主張するものである。証明の骨子は、ゲルファンドとレヴィタンによるスツルム・リウビル逆問題と非整数階の拡散方程式の弱解の性質である。 α は実際の拡散の基本的な性質を確定する重要な物理パラメータであり、山崎氏のこの結果は、実験で α を決める際の数学的な保障を与えたものとして重要である。

山崎智裕氏による第一、二部の結果は、逆スペクトラル問題の深い知識に基づき、従来その重要性にも関わらず省みられなかった非対称な常微分作用素系に関する逆問題を考察したものであり、第三部の主要結果は非整数階拡散方程式の逆問題の一意性に関するまったく新しいものである。

よって、論文提出者 山崎智裕 は博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。