論文の内容の要旨

論文題目： On the existence of homomorphisms between principal series of complex semisimple Lie groups
（複素半単純リー群の主系列表現の間の準同型の存在について）

氏名： 阿部 紀行

G を実半単純 Lie 群とし，$P = MAN$ をその極小放物型部分群とすると，P の既約表現 σ に対してその誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ が定義される．このようにして得られる G の表現を主系列表現と呼び，G の表現論において重要な役割を果たす．しかしその構造は一般には非常に複雑であり，詳しいことはわかっていない．本論文では，G が複素半単純 Lie 群の場合に主系列表現の間の準同型について論じる．そのような準同型の研究は主系列表現の構造を調べる手がかりになると思われる．

主定理を述べよう．G を複素半単純 Lie 群とすると，P はその Borel 部分群となる．$P = HN$ を Levi 分解とすると，H は G の Cartan 部分群である．$\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}$ をそれぞれ G, P, H の Lie 環，ρ を正ルートの和の半分とし，$\lambda \in \mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ に対し，$M(\lambda)$ を最高ウェイト $\lambda - \rho$ を持つ Verma 加群とする．G の表現は微分により $\mathfrak{g}$ の実 Lie 環としての表現を与え，従って $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ の複素 Lie 環としての表現を与える．$\mathfrak{k} = \{(X, X) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{g}\}$ とおく．この同一視のもとで，主系列表現は $L(M(\lambda), \delta M(\mu))$ に対応する．ただし，δ は圏 $\mathcal{O}$ の双対であり，一般に $\mathfrak{g}$ 加群 M, N に対し

$$L(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N) \mid f \text{ は } \mathfrak{k} \text{ 有限}\}$$

とおいた．また，$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ の $L(M, N)$ への作用は $((X, Y)f)(m) = Xf(m) - f(Ym)$ により定義される．

主定理を述べるために，更に記号を準備する．W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とし，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し W_λ を λ に関する整 Weyl 群とする．この時，W_λ も Coxeter 系を成す．$w = s_1 \cdots s_l \in W_\lambda$ を簡約表示とする．ルート α_i を s_i が α_i に関する鏡映であるようにとる．$\beta_i = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$ とおき，$\check{\beta}_i$ を対応する余ルートとする．$\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し集合 $A_w(\mu)$ を

$$A_w(\mu) = \left\{ \mu' \in \mathfrak{h}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le l \text{ が存在し，} \mu' = s_{\beta_{i_r}} \cdots s_{\beta_{i_1}} \mu \text{ かつ} \\ k = 1, \dots, r \text{ に対し } \langle \check{\beta}_{i_k}, s_{\beta_{i_{k-1}}} \cdots s_{\beta_{i_1}} \mu \rangle \in \mathbb{Z}_{<0} \end{array} \right\}$$

と定義する．これは w の簡約表示の取り方によらない（論文 Lemma 2.3 の後）．

以上の準備のもとで，本論文の主定理は次のようになる．w_λ を W_λ の最長元とし，W_λ^0 を W の λ における固定部分群とする．．

定理 1（論文 Theorem 1.1）． $w_1, w_2 \in W_\lambda$，$\mu_1, \mu_2, \lambda \in \mathfrak{h}^*$ とし，λ が支配的，つまり全ての正ルート α に対し $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \notin \mathbb{Z}_{<0}$ を満たすとする．$w_1^{-1} w_\lambda A_{w_\lambda w_1}(w_\lambda \mu_1) \cap W_\lambda^0 w_2^{-1} A_{w_2}(\mu_2) \neq \emptyset$ であるとき，またそのときに限り $\mathrm{Hom}(L(M(w_1\lambda), \delta M(\mu_1)), L(M(w_2\lambda), \delta M(\mu_2))) \neq 0$ である．

この定理は，任意の二つの主系列表現の間に 0 でない準同型が存在するかに対する判定条件を与える（論文 Lemma 3.2）．

Bernstein-Gelfand により，G の Harish-Chandra 加群のなす圏と $\mathfrak{g}$ の圏 $\mathcal{O}$ との間の圏同値が知られている．整かつ正則な場合に，この圏同値のもとで主系列表現に対応する対象はねじれた Verma 加群と呼ばれる．従って定理 1 は特殊な場合にねじれた Verma 加群の間の準同型に関する結果も与えるが，本論文では同種の結果を全ての場合に対して得た．すなわち，次が成り立つ．ただし，$w \in W$ に対し，T_w を Arkhipov により定義された twisting functor とし，w_0 を W の最長元とする．

定理 2（論文 Theorem 1.2）． $w_1, w_2 \in W$，$\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{h}^*$ とする．$w_1 A_{w_1^{-1}}(\mu_1) \cap w_2 w_0 A_{w_0 w_2^{-1}}(w_0 \mu_2) \neq \emptyset$ である時，またそのときに限り $\mathrm{Hom}(T_{w_1} M(\mu_1), T_{w_2} M(\mu_2)) \neq 0$ である．

論文「Jacquet Modules of Principal Series Generated by the Trivial K-type」及び「Generalized Jacquet modules of parabolic induction」における結果と合わせることで，この定理は一般の実半単純 Lie 群の主系列表現に対する情報も与える．