論文の内容の要旨

Rumor Transmission Models and Persistence Analysis
(流言伝播モデルとパーシステンス解析)

河内　一樹

社会情勢が変化すると，その情報を把握すべく我々は言語による意思疎通を図る．しかしその活動によって我々の心理や行動が変容し，そのミクロな変化が社会情勢を変容することも多い．従って，ある言説が人々の間に広がるダイナミクスを調べることは社会を安定化するために有用な視点を提供すると考えられる．

本論文では，口頭でのコミュニケーション（口コミ）が連鎖することで短期間の間に不特定多数の人々に大規模に広まる言説を「流言」と定義する．そして，流言を知って積極的に広めようとする人の多寡によって，その流言が広まっているかどうかを判断し，その人数の時間変化を数学的に解析する．

流言が伝播する基本的な仕組みは,「流言を知らない人」が「流言を知って広める人」に出会い会話する中で,「広める人」がその流言を話題にすることで「知らない人」が流言を知る，というものである．一方，感染症が広まる基本的な仕組みは，未感染者が感染者に接近することで感染者から未感染者に病原体が移り，未感染者が発症するというものである．この類比から，感染症のモデリングと同様のモデリングを流言伝播に対して行うことには一定の意義を認めることができる．

先に感染症の数理モデルとして最も基本的な，SIR モデルを簡単に紹介する．人口を感受性人口 (susceptibles)，感染人口 (infected; infectious), 隔離された人口 (recovered; removed) の 3 状態に分類し，各状態ごとに人々の行動が均一化されていると仮定する．未感染者と感染者の接触によって未感染者が感染し，また感染者は一定の割合で隔離状態に移行する，という状態遷移を考慮して，各状態の時刻 t での人口（あるいは人口密度）をそれぞれ $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ で表すと，SIR モデルは

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) \end{cases}$$

なる常微分方程式系で表される．ここで β は感染率，γ は隔離率で，$\beta I(t)$ は感染力である．実際には，感染症に関する状態をさらに細かく分類するが，R-状態の個体が他の状態の個体と接触しても病原体を広めることはなく，状態遷移を引き起こさないことに注意する．

本論文で解析を行う流言伝播モデルを紹介する．Chapter 1 では，ある流言に関する状態に着目して，人口を感受性人口 (susceptibles, 流言を知らない人たち)，広め役人口 (spreaders, 流言を知って広める人たち) 及び火消し役人口 (stiflers, 流言は知っているが伝播を阻止する人たち) の 3 状態に分類する．個体間の接触により引き起こされる状態遷移として次の 3 通りを考える．

(i) 感受性個体と広め役個体が接することで，感受性は流言を知り，一定の割合で広め役に，また一定の割合で火消し役に遷移する．

(ii) 広め役個体同士が頻繁に接し流言を話題にすることで，飽きが生じて，一部の広め役個体が火消し役に遷移する．

(iii) 広め役個体と火消し役個体が接すると，広め役個体が話題提示した流言に対して火消し役個体が「関心を示さない」「否定的な見解を見せる」ことで，一部の広め役個体が火消し役に遷移する．

(iii) は，SIR モデルで言えば，R-状態の個体は免疫保持者であって，I-状態の個体に出会うと自らが保持する免疫を I-状態の個体に渡すと表現できるだろう．これは感染症において非現実的であり，ここに流言と感染症との 1 つの差異が存在する．また，多くの感染症では病原体が短期間には突然変異しないのに対して，「噂に尾鰭がつく」の言い回しにもあるように，流言の殆どは短期間に次々と変容する，という重大な違いがある．この効果を考慮する場合，Chapter 1 では広め役に関しては会話を通じて常に最新の流言を得ており状態遷移を考えない．一方で火消し役に関しては積極的に流言に関する情報を得ないために，自分が知りえた流言からある程度変化した流言は実質的には知らないのと同然とみなし，火消し役個体は一定の割合で感受性に遷移すると仮定する．

その上で，考えている人口集団について，

閉じた集団 出産や死亡を考慮せず，また移民（流出・流入ともに）も存在しない．短期間での流言伝播を考えるならば妥当な仮定である．

一定の流出入 常に一定量の新規人口が感受性個体として人口に加わる一方で，一定の流出率（死亡や外部への流出）で人口集団から外れる．

年齢構造 年齢ごとに，個体間の接触頻度や状態遷移の確率が異なる．出生率や死亡率も年齢に依存するが，流言に関する状態には依存しない．

の 3 つのケースについて微分方程式モデルを提唱し，系の適切性を確かめた上で，系の大域的挙動，すなわち十分時間が経過したときに各状態の人口密度や全体に占める割合がどうなるかを調べる．

「閉じた集団」の場合，総人口が一定であることと人口は常に非負値を取ることから，微分方程式は実質的には 2 次元の有界閉集合上での自励系非線形常微分方程式系となる．そして Dulac–Bendixson の判定条件を用いることで解軌道の ω 集合は必ずある平衡点となることが証明される．従って，平衡点の個数や局所安定性を調べれば，系の大域的挙動がほぼ特定できることになる．「一定の流出入」の場合も，十分時間が経てば総人口が一定値に収束することから，その極限的状況に注目すれば「閉じた集団」と同様の取り扱いが可能となる．

平衡点の種類として大きく分けて全員が感受性の平衡点 (RFE; rumor free equilibrium)，広め役や火消し役が存在する平衡点 (REE; rumor endemic equilibrium) が考えられる．そのどちらが大域的に漸近安定かは，RFE の状態にごく少数の広め役が侵入した際に一定期間に新規に生まれる広め役の数と，人口の流出入に伴う広め役の減少の度合いの大小で定まり，前者が大きいと REE が漸近安定となることを常微分方程式系で証明する．

年齢構造を考慮したモデルは境界条件のついた偏微分方程式系として表される．この場合，RFE は常に存在し，RFE の状態にごく少数の広め役が侵入した際に一定期間に新規に生まれる広め役の最大数がある作用素のスペクトル半径として求まる．これが 1 より小さいと REE は存在せず，1 より大きいと RFE から分岐する形で REE が存在し，分岐点の近傍で局所安定であることを示す．

平衡点の安定性以外に系の大域的挙動を調べる一つの指標として注目されているのが，パーシステンスと呼ばれる概念である．これは十分時間が経過したときに，系のある成分が絶滅せずに生存しているかを表す

ものである．その中でも最も強い概念である一様強パーシステンスとは，ある定数 ε が存在して，その成分が正であるような任意の初期条件に対して，十分時間が経過すると，その成分量が必ず ε を上回る，というものである．

Chapter 2 では，系が一様強パーシステントであるための十分条件を与える定理を引用し，その定理の適用例を 2 つ紹介する．また，同じ方法を Chapter 1 と Chapter 4 で扱う年齢構造モデルにも適用し，流言の広め役や火消し役に着目して一定条件下で系が一様強パーシステントであることを証明する．これは，その条件下では，最初に広め役や火消し役がいるなら，十分時間が経てば広め役や火消し役が必ず一定数以上になることを意味する．

さて，流言伝播には口コミが大きな影響を与えるものの，外部情報源が流言伝播に与える影響は無視できない．ここではマスコミだけでなく，マスコミを通じて周囲に多大な影響力を与える人々もマスコミと同一視して扱う．また，Chapter 1 では火消し役が自ら流言について話題にしないことを暗黙のうちに仮定するが，例えば対抗流言を流すなどの方法で，流言伝播を積極的に抑えようとすることも考えられる．このような火消し役を，Chapter 1 で考えるものと区別して「積極的火消し役」(active stiflers) と定義する．Chapter 3 では閉じた集団において

- 火消し役か，それとも積極的火消し役か
- 流言が変容する場合，しない場合
- マスコミの影響力がない場合，流言伝播に影響を与える場合，流言伝播の抑制に影響を与える場合

をいろいろ組み合わせて，系の大域的挙動を調べる．その中で，「積極的火消し役」「流言が変容する」「マスコミが影響を与える」と組み合わせたモデルについて，パラメータの取り方によって前進分岐も後退分岐も起こりうることは特筆すべきである．流言を抑制するための目標設定に影響するからである．

火消し役の意味づけが異なることで系の挙動が異なる可能性をさらに調べるために，Chapter 4 では積極的火消し役が関与する年齢構造化流言伝播モデルを提示し，Chapter 1 と同様の考察を行う．このモデルでは Chapter 1 のモデルと異なり，感受性と広め役のみが共存する平衡点，感受性と積極的火消し役のみが共存する平衡点が考えられる．それぞれの平衡点が存在するための条件や局所安定性を導出することができる．