論文審査の結果の要旨

名 前　Gombodorj Bayarmagnai

論文題目：The $(\mathfrak{g}, K)$-module structure of principal series and related Whittaker functions of $SU(2,2)$

和訳：$SU(2,2)$ の主系列の $(\mathfrak{g}, K)$-加群構造と，関連する Whittaker 関数

多変数保型形式の理論とも関連する半単純 Lie 群の表現論は現代の数学において一つの中心的役割を果たしてきた．特に Whittaker 模型は保型形式の尖点における Fourier 展開の理論において基本的であり，Whittaker 関数の知識は保型形式の深い研究に重要である．本論文では群 $G = SU(2,2)$ の主系列表現に対して，この問題を扱う．

まず (π, H_π) を，G の極小放物型部分群 P_{min} から誘導された既約主系列表現とする．つまり $P_{min} = MAN$ を P_{min} の Langlands 分解とするとき，M の指標 σ，$\mathfrak{a} = Lie(A)$ の複素数値線形形式 ν，正ルートの総和の半分 ρ を用いて，$\pi := \mathrm{Ind}_{P_{min}}^{G}(\sigma \otimes e^{\nu+\rho} \otimes 1_N)$ で定義される表現とする．

当論文の第一の主結果は：

主結果 1　表現空間 H を $L^2(K)$ の閉部分空間と標準的なやり方で同一視し，H の K 有限ベクトル全体のなす空間 H_K の等質分解の自然な直交基底を具体的に構成し，その基底に関する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の作用を明示的に計算したことにある．ここで $\mathfrak{g}$ は Lie 群 G の Lie 環で，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ はその複素化である．

この結果の定式化は，一方で Dirac 作用素によって，K のある表現 $\tau \in \hat{K}$ の τ-等質成分から，その近くにある別の τ' の等質成分への写像を定義し，これによって誘導される K-絡空間の間の線形写像

$$\mathrm{Hom}_K(\tau, H_K) \to \mathrm{Hom}_K(\tau', H_K)$$

の自然な定義行列を決定する，という形で行われる．ここで，各絡空間に正準的な基底を定める必要があるが，これは上に述べた「等質成分の自然な直交基底」より誘導される．この事実は，G の Casimir 作用素 C の quasi-simple な表現への作用は，無限小指標 χ_π によって，$\pi(C)v = \chi_\pi(C)v$ $(v \in H_K)$ の形で与えられるという，Casimir 方程式の同変的な類似物とみなせる．

論文の第二の部分で, 著者はいくつかの Jacquet 積分の明示的な計算を与えた．説明のため，Whittaker 模型の定義を思い出そう．

極大べき単部分群 N の連続ユニタリ指標 η: $N \to U(1)$ に対し, $C_\eta^\infty(N\backslash G)$ を

$$\text{任意の } n \in N \text{ と } g \in G \text{ に対し，} f(ng) = \eta(n)f(g)$$

を満たす関数 f 全体のなす $C^\infty(G)$ の部分空間とする．これは，右作用で G 加群となる．$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ を $(\mathfrak{g}, K)$-加群（K は G の極大コンパクト部分群で，$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環）としてみると，次の自然な写像が得られる．

$$\mathrm{Hom}_G(H_\pi^\infty, C_\eta^\infty(N\backslash G)) \to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(H_\pi|_K, C_\eta^\infty(N\backslash G)) \tag{1}$$

ただし，H_π^∞ は H_π の C^∞ ベクトル全体である．この右辺は Kostant により研究された代数的 Whittaker ベクトルの空間で，将来的には本論文の前半の結果を応用してさらに詳しく調べられるはずのものである．(1) の左辺の特別な元，存在すればスカラー倍を除いて一意に与えられるのが（Shalika の定理），Jacquet 積分である．まずこの定義から思い出そう．

$M^* = N_K(\mathfrak{a})$ とすると，$W(A) = M^*/M$ は G の小 Weyl 群となる．$s \in W(A)$ を最長元とし，その M^* への持ちあげを s^* とする．Jacquet は H_π^∞ 上の連続汎関数で，$J_{\sigma,\nu}(\pi(n)f) = \eta(n)J_{\sigma,\nu}(f)$, を満たすものを

$$J_{\sigma,\nu}(f) = \int_N \eta(n)^{-1}a(s^*n)^{\nu+\rho}f(k(s^*n))dn$$

により定義した．ここで，f は $L^2_{(M,\sigma)}(K)$ における C^∞ ベクトルである．C^∞ ベクトル $f \in L^2_\sigma(K)$ に対し，$C_\eta^\infty(N\backslash G)$ の元 $J_f(g)$ を

$$J_f(g) = J_{\sigma,\nu}(\pi(g)f), \ (g \in G).$$

と定義する．関数 $J_f(g)$ は G 上緩増大で，とくに A 上でも緩増大である．

本論文では第二の主結果として，π の中の特別な K-type τ に属する f に対し，$J_f(g)$ の A 動径成分における明示的公式を与えた．

主結果２　次の Jaquet 積分の表示がある．

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\nu_1+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}+1)\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1)}$$
$$\times\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}}\int_0^\infty\int_0^\infty K_{\frac{\nu_1}{2}}\left(2y_2\sqrt{\frac{(1+x)(1+y)}{xy}}\right)K_{\frac{\nu_2}{2}}\left(2y_1\sqrt{1+x+y}\right)$$
$$\times\left(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\right)^{\frac{\nu_1}{4}}\left(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\right)^{\frac{\nu_2}{4}}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

である．

これは $(y_1, y_2) \in A$ のそれぞれの変数に関して無限遠で急減少する．このように，変形 Bessel 関数により表すことができたことを用いて，Mellin-Barnes 積分表示を得た．

群 $SU(2,2)$ は整数論や純粋数学を離れても，物理学，特に宇宙論や場の理論にも登場する重要な群である．主結果１は極めて基本的な結果で，いろいろ利用価値が高いと思われる．高い階数の半単純 Lie 群の Jaquet 積分が明示的に計算されている事例は少ない．主結果２も，それゆえ新しい興味深い結果である．

よって論文提出者　Gombodorj Bayarmagnai は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい資格があると認める．