

論文の内容の要旨

論文題目 On behavior of solutions near singularities
for nonlinear diffusion equations

(副題 非線形拡散方程式の特異点近くでの解の挙動)

氏名 関 行宏

本論文は以下の3つのテーマから構成されている.

- (1) 反応項を持つ非線形拡散方程式に対する“最小爆発時刻”での空間無限遠での爆発,
- (2) 軸対称平均曲率流に従って動く“最小消滅時刻”を持つ曲面の解析,
- (3) 吸収項を持つ半線形熱方程式に対する Dead-core rate の研究.

【第一章・空間無限遠での爆発】

本章では準線形拡散方程式 $u_t = \Delta u^m + u^p$, $p > 1, m > 0$, に対する解の爆発現象について論ずる。ここで言う解の爆発とは、有限時刻 T で解の上限ノルムが無限大に発散することを意味する。この T を爆発時刻と呼ぶ。歴史的な研究の発展を追うと、初期の研究では時間局所解を時刻無限大まで延長できるか、またある時刻までしか解を延長できず、爆発してしまうかを方程式の指数の条件や初期値の無限遠での減衰の速さ、あるいはエネルギーの符号などで判定することが多かった。その後、解が爆発するかどうかを問うのではなく、爆発するとしたらその時刻はいつか？解が非有界になる点の集合（爆発集合）はどのような性質を持つっているか？そのような点のまわりで解の形状はどのようになっているか？等、爆発現象をより詳しく調べる研究も盛んに行われるようになった。

爆発集合に関しては、有界領域でのディリクレ問題あるいは初期値が無限遠で減衰する場合の研究が多くなされてきた。ところが比較的最近になって初期値が定数でなく、無限遠で最大値 M に収束するような場合には解が空間無限遠で爆発し、さらに空間内部では局所有界、つまり爆発集合は空集合になるという現象が起こることが分かった。無限遠の爆発する『方向』についても初期値の増大する方向で特徴付けられる。また、このときの爆発時刻は定数 M を初期値とする常微分方程式の爆発時刻と一致する。この結果は方程式が半線形（上の方程式で $m = 1$ の場合）に示されていたことだが、非常に粗く言って、空間無限遠では反応項の効果で常微分方程式の解と同じように動き、空間内部では拡散効果が爆発を抑制すると解釈できる。では拡散の速さが変わるとき、この結果は変わるだろ

うかを考えたのがここでの研究である。拡散項を上記の形にとることでその速度が変わることに注意して欲しい。値の大きい場所では $m > 1$ のとき拡散が早くなり、 $m < 1$ のときは拡散が遅くなることが見て取れる。従って、後者の場合は $m = 1$ のときとほぼ同じ現象が起こると予想できる。後者の場合については部分的な結果が分かっている、 $1 < m < p$ の場合に同様の結果になる(参考論文1)。しかし、その証明は技術的な理由で $m < 1$ の場合には適用できなかった。そこで半線形方程式の場合に知られていた別の手法を $m < 1$ の場合にも適用できるように改良することによって、やはり望ましい結論が得られることを証明した。また、ここでは爆発時刻が陽に求まり、それが可能な爆発時刻の中で最も小さいものであることに注目して、そのような爆発時刻(最小爆発時刻)を持つような解の条件を初期値の条件で完全に特徴付けた。

これらの結果を総合すると、上記の準線形方程式で考えた場合、 $0 < m < p$ という条件で反応-拡散現象を見ると最小爆発時刻を持つ解は全て空間無限遠で爆発し、初期値が定数でなければ、爆発は空間内部では起こらない。そして、無限遠で爆発する『方向』は初期値の増大する方向で特徴付けられる。その意味で拡散の速さが違うだけで爆発現象はほぼ同じと解釈できるが、解の概念を弱めた場合に、何らかの延長解を構成できるか? という疑問が残る。本章の最後では $1 \leq m$ のとき、上述の解はすべて弱い意味でも延長不可能であることを証明した。

【第二章・軸対称平均曲率流】

本章では第一章での結果を踏まえて、軸対称平均曲率流に従って動く曲面の時間発展の様子を考察する。平均曲率流に従って動く曲面については、初期曲面がコンパクトで(その囲む領域が)凸である場合その凸性を保ちつつ収縮して、有限時刻のうちに1点になって消えることが知られている。この凸性の仮定は本質的で、もし初期曲面(の囲む領域)が凸でない場合はその結果は一般に成り立たず、ある有限時刻で曲面のくびれ部分が千切れるような軸対称な曲面が存在する。一般のコンパクトな軸対称曲面を考える場合、このような『千切れるくびれ』は高々有限個であって、千切れる瞬間を除いて曲面は滑らかであり、最終的にはその曲面の各構成要素が回転軸上の点に収縮することが知られている。しかし、実際に曲面のくびれ部分がある時刻で千切れるかどうかを判定するのは困難であって、あくまで千切れる回数の可能性が有限回であるということしか分かっていない。このように、コンパクトな曲面についての研究は進んでいるが、非コンパクト曲面について、特に無限遠での挙動については研究されていなかった。

ここで考える曲面は非コンパクトであって、ある一変数正値関数のグラフを実軸に関して回転して得られるものである。このとき、平均曲率流方程式はその正値関数に対する次元準線形拡散方程式に帰着される。曲面のくびれが千切れることは、この関数の下限がある時刻でゼロになることと同値である。ある一定の枠組みの中で最初の特異性発生時刻(quenching time)においてはどのくびれも千切れない曲面をすべて決定することを試みた。その枠組みを『曲面を記述する正値関数の下限を半径とするシリンダーの消滅時刻と同じ quenching time を持つものの全体』とした。この枠組みでは第一章でのアナロジーで、無限遠で最初開いている『曲面の端』はその quenching time において閉ざされ、さらに曲面は切れることなく滑らかに繋がっていることが予想される。

これを実際に証明するには方程式の構造がかなり異なるので、単純には第一章で用いた

手法を応用できないという困難さがあった。この困難を乗り越えるため、第一章から形式的に予想される補題などを古典的な放物型方程式の理論と軸対称平均曲率流の研究で知られていたいくつかの結果を組み合わせ、望ましい結果を得ることができた。

【第三章・Dead-core rate】

本章では吸収項を持つ半線形熱方程式に対する Dead-core rate を考察する。Dead-core とは解のゼロ点の集合のことであるが、ここで扱う問題は正值解が初めて Dead-core を形成する時の速さ (Dead-core rate) を調べることである。もっとも自然と考えられる Dead-core rate は拡散項を無視して得られる常微分方程式と同じ速さ (self-similar rate) であるが、そのような解に対しては解のその時刻での振る舞いは自己相似的であることが予測され、その点付近での詳しい解の形状が求められると期待できる。

実際、吸収項を反応項に取り替えた方程式に対する爆発問題では、その爆発の速さが自己相似的であれば、爆発点付近での解の振る舞いを詳しく調べることが出来、その可能な爆発解の形状が非常に詳しく研究されている。従って、どのような条件の下で爆発の速さが自己相似的であるかを調べることは解の爆発現象を調べる上で重要な手がかりを与えらると言える。

このアナロジーを主題の吸収項付き半線形熱方程式に対する Dead-core の研究に適用することを考えると、まず解の Dead-core rate は一般に自己相似的かどうかを調べるのが重要である。もし『すべての解』に対してそれが自己相似的であるならば、そのときの解の振る舞いを詳しく調べることが出来ると期待される。ところが、最近になって初期値がある定常解付近から選ぶと解の Dead-core rate は一般に自己相似的ではなく、それよりも速いことが示された。その正確な Dead-core rate を求めることは一般には難しい。Dead-core rate が自己相似的でない解については上記のように解の振る舞いを詳しく調べることが出来るかどうかは今のところ分かっていないが、自己相似的でない Dead-core rate は具体的にどのようなものであるかを調べることは、それを調べる上でも基本的な問題であろう。その為にも (self-similar rate でない) 正確な Dead-core rate が求まる特殊解を構成することは重要なステップである。また、それが出来ればその特殊解にある意味で近い解を探して行くことにより、それと同じ Dead-core rate を持つ解の族が求められると期待できる。このような理由で、基準となる特殊解のクラスはできるだけ緩い条件の下で構成される方が応用上も便利であると思われる。現在そのような特殊解は空間 1 次元で、ある定常解との交差数が奇数回であるという仮定の下で発見されている。もし解に球対称性を仮定するならば、この結果は高次元でも同じように成り立つであろうし、『ある定常解との交差数が奇数回』という仮定で『奇数』を『偶数』に変えても自然に成り立つと考えられる。今回得た結果はこれらが実際にどのように証明されるかを詳述したものである。『交差数が奇数回』という仮定は、実はそのような解の構成において原点から十分離れたところで求めるべき解は必ずその定常解を超えないという条件になっており、それがそのような解の構成を可能にする。従って、その仮定を外すには原点から離れたところでのアプリアリ評価を別の観点で示すことができればよい。そこで解の増大度に注目し、それが定常解の増大度を超えないことを示すことにより、上記のことを証明した。