論文審査結果の要旨

氏名　関　行宏

非線形拡散方程式の初期値問題は、時間局所的に解が存在しても、有限時間で解が存在しなくなる事があり得る。解の値が無限大に発散する場合は爆発、ゼロに収束する場合は消滅、死滅など状況によって様々な名前が付けられている。爆発現象の研究は、非線形解析の重要な一分野である。

本博士論文では、次の３つのテーマを扱っている。
（１）反応項を持つ非線形拡散方程式に対する“最小爆発時刻”での空間無限遠での爆発，
（２）軸対称平均曲率流に従って動く“最小千切れ時刻”を持つ曲面の解析，
（３）吸収項を持つ半線形熱方程式に対する消滅速度の研究.

空間無限遠爆発問題では、準線形拡散方程式のある時刻で爆発する解について論ずる。空間全体で爆発が起きるわけではないので、解が非有界になる点の集合を爆発集合と呼ぶ。

爆発集合に関しては、有界領域でのディリクレ問題あるいは初期値が無限遠で減衰する場合の研究が多くなされてきた。ところが比較的最近になって半線形方程式について初期値が定数ではなく、無限遠で「上限値」に収束するような場合には解が空間無限遠で爆発し、さらに空間内部では局所有界、つまり爆発集合は空集合になるという現象が起こることが分かった。無限遠の爆発する『方向』についても初期値の増大する方向で特徴付けられる。また、このときの爆発時刻は「上限値」を初期値とする常微分方程式の爆発時刻と一致する。粗く言って、空間無限遠では反応項の効果で常微分方程式の解と同じ様に動き、空間内部では拡散効果が爆発を抑制すると解釈できる。では、拡散の速さが解の値によって変わるとき、この結果は変わるだろうかを考えたのが本博士論文の研究である。拡散が熱方程式の場合より早い場合にも熱方程式と同様の結果を得た。（遅い場合は論文提出者が既に別論文で示している。）また、本論分では爆発時刻が陽に求まり、それが可能な爆発時刻の中で最も小さいものであることに注目して、そのような爆発時刻（最小爆発時刻）を持つような解の条件を初期値の条件で完全に特徴付けることに成功している。

解の概念を弱めた場合に、何らかの延長解を構成できるかという問題に対しては、上述の解は全て弱い意味でも延長不可能であることを証明した。

空間無限遠爆発の結果を踏まえ、さらに軸対称平均曲率流に従って動く曲面の時間発展の様子を考察した。初期曲面（の囲む領域）が凸でない場合は、ある有限時刻で曲面のくびれ部分が千切れるような軸対称な曲面が存在する。一般のコンパクトな軸対称曲面を考える場合、このような『千切れるくびれ』は高々有限個であって、千切れる瞬間を除いて曲面は滑らかであり、最終的にはその曲面の各構成要素が回転軸上の点に収縮するとこが知られている。このように、コンパクトな曲面についての研究は進んでいるが、非コンパクト曲面について、特に無限遠での挙動については研究されていなかった。

ここで考える曲面は非コンパクトであって、ある一変数正値関数のグラフを実軸に関して回転して得られるものである。このとき、平均曲率流方程式はその正値関数に対する一次元準線形拡散方程式に帰着される。曲面のくびれが千切れることは、この関数の下限がある時刻でゼロになることと同値である。ある一定の枠組みの中で最初の特異性発生時刻（千切れ時刻）においてはどのくびれも千切れない曲面を全て決定することを試みた。その枠組みを『曲面を記述する正値関数の下限を半径とするシリンダーの消滅時刻と同じ千切れ時刻を持つものの全体』とした。この枠組みではテーマ（１）とのアナロジーで、無限遠で最初開いている『曲面の端』はその千切れ時刻において閉ざされ、さらに曲面は切れることなく滑らかに繋がっていることが予想される。

これを実際に証明するには方程式の構造がかなり異なるので、単純には（１）について用いた手法を応用できないという困難さがあった。この困難を乗り越えるため、テーマ（１）から形式的に予想される補題などを古典的な放物型方程式の理論と軸対称平均曲率流の研究で知られていたいくつかの結果を組み合わせ、この困難さを克服している。

吸収項を持つ半線形熱方程式に対する消滅速度を考察する。解のその消滅時刻での振る舞いは自己相似的であることが予測され、その点付近での詳しい解の形状が求められると期待できる。しかし、近年自己相似的ではない消滅解の存在が示されている。

消滅速度が自己相似的でない解については上記のように解の振る舞いを詳し

く調べることが出来るかどうかは今のところ分かっていないが、自己相似的でない消滅速度は具体的にどのようなものであるかを調べることは、それを調べる上でも基本的な問題である。現在自己相似的ではない消滅速度の特殊解は空間 1 次元で、ある定常解との交差数が奇数回であるという仮定の下で発見されている。もし解に球対称性を仮定するならば、この結果は高次元でも同じように成り立つであろうし、『ある定常解との交差数が奇数回』という仮定で『奇数』を『偶数』に変えても自然に成り立つと考えられる。本論文で得た結果はこれらが実際にどのように証明されるかを詳述したものである。『交差数が奇数回』という仮定は、実はそのような解の構成において原点から十分離れたところで求めるべき解は必ずその定常解を超えないという条件になっており、それがそのような解の構成を可能にする。従って、その仮定を外すには原点から離れたところでのアプリオリ評価を別の観点で示すことができればよい。そこで解の増大度に注目し、それが定常解の増大度を超えないことを示すことにより、上記のことを証明した。

これは全て大変レベルの高い成果である。よって論文提出者の関行宏氏は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。