論文の内容の要旨

論文題目　Surface links which are coverings of a trivial torus knot (自明なトーラスの被覆の形をした曲面結び目の研究)

氏名　中村 伊南沙

トポロジーの一分野である結び目理論、そのなかでも特に２次元ブレイドと曲面結び目について研究している。古典的に広く研究対象とされてきた３次元空間内の１次元のブレイドや結び目の拡張された概念として、４次元空間内の曲面ブレイドと曲面結び目が定義される。特に、単純曲面ブレイドのことを２次元ブレイドといい、球面の局所平坦な埋め込みを２次元結び目という。

曲面ブレイドの概念は Viro や Rudolph によって導入され、Kamada によって２次元ブレイドと曲面結び目との間の基本的な関係が研究されてきた。[S.Kamada, "Braid and knot theory in dimension four", Math. surveys and monographs 95, Amer.Math.Soc., 2002]

任意の１次元のブレイドの閉包は結び目であるが、逆に１次元の任意の結び目はあるブレイドの閉包として表されることが知られている（Alexander の定理)。同様にして、２次元では任意の向き付けられた曲面結び目はある２次元ブレイドの閉包として表される。つまり、任意の向き付けられた曲面結び目は自明な球面の単純分岐被覆の形に変形できることが知られている。(注意．曲面結び目には向き付け不可能なものも存在する。)

また、２次元円盤上のあるグラフ、チャートという概念がKamadaによって導入されたが、２次元ブレイドは境界のないチャートとして表すことができる。また、チャートムーブという局所的な変形による同値変形によって、同じ次数の２次元ブレイドとチャートの同値類は１対１に対応している。従って、任意の向き付けられた曲面結び目はあるチャートで表せる。さらに、この

場合、チャートは球面上に描かれているとみなしてもよい。

１次元の結び目からの曲面結び目の構成については多くの研究が成されてきた。２次元結び目として有名なのはツイストスパン結び目である。また、トーラスの埋め込みとして構成されるものとしてはスパントーラス結び目、ターンドスパントーラス結び目、シンメトリースパントーラスなどが挙げられる。

１次元結び目を４次元の中で円周に沿って動かしてできる曲面結び目をスパントーラス結び目といい、円周に沿って１周する間に円周の軸に関して１回転してできる曲面結び目をターンドスパントーラス結び目という。Boyleは円周の軸に関して整数回回転してできる曲面結び目について考察し、１次元結び目が非自明であるとき、このような曲面結び目の同値類は、円周の軸に関する回転が奇数か偶数かにしかよらないことを示した。スパンかターンドスパンしかないということである。[J.Boyle, "The turned torus knot in S^4", J.Knot Theory Ramifications 2(1993), 239-249]

また Teragaito はこれの一般化を行い、周期性のある１次元結び目を、円周に沿って１周する間に軸に関して有理数回回転して構成される曲面結び目をシンメトリースパントーラスと名づけた。[M.Teragaito, "Symmetry-spun tori in the four-sphere", Proceedings of Knots 90, 163-171]

本論文では曲面結び目の中でも特に、上に述べたシンメトリースパントーラスを含む曲面結び目として、自明なトーラスの単純分岐被覆の形をしている曲面結び目をトーラス被覆結び目と名づけ、トーラス被覆結び目の性質を考察する。定義より、トーラス被覆結び目はトーラス上のチャートとして表される。これをトーラス被覆チャートと定義する。また、トーラス上の次数mのチャートで定まるトーラス被覆結び目を、次数mのトーラス被覆結び目と定義する。成分数が１でトーラス上のチャートに黒い頂点が #b 個ある場合、トーラス被覆結び目の種数は 1+#b/2 となっている（#b は常に偶数である)。特に、トーラス上のチャートに黒い頂点がない場合、トーラス被覆結び目の各成分の種数は１となっている。また、２次元結び目、すなわち球面の埋め込みである曲面結び目は、種数がゼロなのでトーラス被覆結び目には含まれない。以下、各節の内容を簡単に述べる。

第１節では、曲面絡み目、２次元ブレイド、チャートの定義、定理等を述べる。

第２節では、トーラス被覆絡み目の定義を述べ（定義２．１)、トーラス被覆チャートを９０度回転してもそれから定まるトーラス被覆絡み目は同値であることを述べる（定理２．３)。また、ターンドスパントーラス結び目の拡張として、ターンドトーラス被覆絡み目を定義し(定義２．４)、それを表すターンドトーラス被覆チャートを求める（定理２．５)。また、2回ターンしたトーラス被覆絡み目は元のトーラス被覆絡み目と同値であることを示す（命題２．６)。トーラス被覆チャートをターンする操作と９０度回転とは可換でないことに注意する必要がある（命題２．７)。また、リボントーラス被覆結び目（成分数１）のノーマルフォームを定義し(定理２．８)、そのうち、ノーマルフォーム（２）は実際にリボンであることを示す（命題２．１０)。最後に、最小三重点数が正の価であるトーラス被覆結び目の例を挙げる（定理２．１１)。

これは（－）もろて型でないトーラス被覆結び目の例でもある（系２．１２）。

第３節では、トーラス被覆絡み目を自明な球面の単純分岐被覆の形にどう実際に変形できるか、４次元空間の全同位を用いて変形することによって調べる。つまり、トーラス上にチャートが描かれてあるとき、それを具体的に球面上にどう描けるか調べる。結果として、トーラス上で次数mのとき、球面上ではその2倍、次数2mで描けることが分かる（定理３．１)。さらに系として、(2,p)-トーラス結び目からできるターンドスパントーラス結び目のブレイド指数は4であることが分かる（系３．３)。

第４節では、各成分の種数が１であるトーラス被覆絡み目の結び目群、絡み目群について考察する。絡み目群の求め方を求め（補題４．１)、1次元の絡み目群について知られている定理を２つ挙げる（定理４．２、定理４．３)。定理４．４では1次元の絡み目群についての定理４．２に反するトーラス被覆絡み目の例を挙げる。また、命題４．５、定理４．６では、リボン型であって、シンメトリースパン（スパン）でない、つまり、リボン型であって絡み目群が1次元の絡み目群でないような２成分のトーラス被覆絡み目の無限個の例を挙げる。それに続く定理４．９では命題４．５、定理４．６のトーラス被覆結び目版、つまり成分数１の無限個の例を挙げる。また、トーラス被覆絡み目の絡み目群は捩れ元を持たないことを示す（定理４．１０)。これから、トーラス被覆結び目はトーラス型の曲面結び目を全て含むわけではないこと、つまり、トーラス被覆結び目でないトーラス型の曲面結び目が存在することが分かる（系４．１１)。

第５節では、トーラス被覆絡み目の結び目解消数について考察する。トーラス被覆絡み目が自明であるならば､それから定まるターンドトーラス被覆絡み目も自明であることを示す(定理５．１)。これにより、元のトーラス被覆絡み目もそれから定まるターンドトーラス被覆絡み目も同じ結び目解消数を持つことが分かる（系５．２)。また、補題としてトーラス被覆チャートがfree edgeのみから成るとき、それから定まるトーラス被覆絡み目は自明であることを示し（命題５．３)、それを用いて、白い頂点を持たない次数mのトーラス被覆チャートから定まるトーラス被覆絡み目の結び目解消数はm-1以下であることを示す（命題５．５)。さらに、結び目解消数が任意の非負整数であるトーラス被覆結び目の例を挙げる（定理５．６)。また、命題５．７では１次元の（p,q）-トーラス結び目からできるスパン、及びターンドスパントーラス結び目は、結び目解消数が１であることの別証明を与える。さらに命題５．８で命題５．７を適用できる１次元の結び目を決定する。もちろんこの１次元結び目は（p,q）-トーラス結び目を含む。