# 論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　中　村　　伊　南　沙

多様体の部分多様体の位置の問題は、多様体論が創始されたときから重要な問題であった。多様体自体の分類はホイットニー等の基本的な仕事の後に、ｈ同境理論などの基本的な道具が整理され、２０世紀の後半には、５次元以上の多様体に対しては、かなり良く理解されるようになった。それらの多様体の部分多様体の位置の問題は、グロモフの理論などでかなり分かってきている。一方、３次元多様体、４次元多様体の研究は、手術理論ともかかわって、その中での円周の配置、曲面の配置の問題とともに研究されてきた。３次元空間内の円周の配置、４次元空間内の曲面の配置については、結び目理論と呼ばれ、現在でも多くの不変量が提案され、それらを理解する研究が進んでいる。

論文提出者は、４次元空間に２次元曲面を与え、その近傍にある曲面結び目を２次元曲面への向きを保つ射影から理解する研究を組織的に行い、特に、４次元空間内に標準的に埋め込まれたトーラスに対しての研究が、豊富な内容をもつものであることを示した。

このような研究は、ビロ、ルドルフ、鎌田聖一達により、標準的に埋め込まれた球面への射影を、曲面ブレイドと名付けて研究するところから始まった。任意の向きづけられた曲面結び目は、曲面ブレイドとして表示される。鎌田聖一は、これをチャートと呼ばれる平面上の図式に表示し、その変形を定義して、曲面の埋め込みのアイソトピー類が等しいことを示す手段を与えた。チャートは、１価、４価、６価の３種類の頂点をもつグラフであり、その辺は、ブレイド群の標準生成元に対応している（１価の頂点は、射影の分岐点に対応し、４価の頂点は、可換なブレイド関係式、６価の頂点は、隣り合うブレイド生成元の関係式に対応している）。

論文提出者中村伊南沙は、標準的に埋め込まれたトーラスに対して、その近傍にある曲面結び目を、このトーラスへの射影のチャートにより表示し、曲面結び目の研究を展開した。

論文の構成に沿って述べる。

第１章では、曲面絡み目等についてのこれまでの理論と結果を概観している。

第２章では、トーラス被覆結び目（絡み目）を、このトーラスの単純被覆結び目（絡み目）として表されるものとして定義し、それを表すトーラス上のチャートを定義している。よく知られているトーラス結び目の表示をおこなっている。さらに、望月コサイクル不変量を利用して、最小三重点数が正であるトーラス被覆結び目の例を挙げている。

第３章では、トーラス被覆絡み目を自明な球面の単純分岐被覆の形に具体的な変形を与えている。ここでは、トーラスから球面の２重被覆分岐写像であっ

て、分岐点が４点であるものを利用して、トーラス上の被覆を球面上の被覆として表示するアイディアが使われている。これにより、あるトーラス結び目についてブレイド指数が決定される。

第４章では結び目群の計算によって、トーラス被覆結び目の性質を考察している。とくに、トーラス被覆結び目でないトーラス型の曲面結び目の存在を示している。結び目群の計算では群の表示を工夫し、元の語表示の問題を扱っている。

第５章では結び目解消数について考察を行い、とくに結び目解消数が任意の非負整数であるトーラス被覆結び目の例を挙げている。その際結び目数の下からの評価は望月コサイクル不変量の挙動を調べて得ている。

これらのいずれの議論も曲面結び目理論における基本的な手段を提供しているものであり、トーラス被覆結び目（絡み目）が、明示的にたくさんの興味深い例を与えることができるものであり、それらについての具体的な計算が可能であり、これまでの曲面ブレイドの理論とも関連がはっきりしているもので、これからの２次元結び目理論において重要なものであることを示している。

このように、論文提出者の結果は４次元空間内の曲面結び目の研究において重要な意味を持つものである。よって論文提出者 中村伊南沙は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。