論文の内容の要旨

論文題目：Generalized Whittaker functions for degenerate principal series of $GL(4,\mathbb{R})$ ($GL(4,\mathbb{R})$の退化主系列表現の一般Whittaker関数)

氏名：廣惠一希

Gを岩澤分解$G=KAN$をもつ実簡約型Lie群とする．$\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{a},\mathfrak{n}$などでLie群$G,K,A,N$などに対応するLie環をあらわし，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$などでそれらの複素化をあらわすことにする．$(\pi,V)$を位相線型空間$V$への$G$の連続許容表現とする．また$V_K$で$V$の$K$有限ベクトル全体のなす$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$加群とする．ここで極大冪単群$N$のユニタリ指標$\eta$に対して次のような$G$上の$C^\infty$級関数の空間，$C_\eta^\infty(N\backslash G)=\{f\in C^\infty(G)\mid f(ng)=\eta(n)f(g)\ n\in N,g\in G\}$を考え，そこへの連続準同型の空間

$$\mathrm{Hom}_G(V,C_\eta^\infty(N\backslash G)),$$

あるいは代数準同型の空間

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)}(V_K,C_\eta^\infty(N\backslash G))$$

を考える．V (resp.V_K) のこれら連続 (resp. 代数的) 準同型による像をV (resp.V_K) の **Whittaker模型**と呼ぶ．また像の各元はG上の関数となるので，それらを **Whittaker関数**と呼ぶ．

上の定義では極大冪単群Nのユニタリ指標からのGへの誘導表現を考えたが，より一般に閉部分群$U\subset N$の既約ユニタリ表現からGへの誘導表現を考え，そこへのVやV_Kからの準同型の像を**一般 Whittaker 模型**，それらの像の各元を**一般 Whittaker 関数**と呼ぶ．

本論文では$G=GL(n,\mathbb{R})$とし，(π,V)として退化主系列表現を考え，それらの一般Whittaker関数を明示的な微分方程式の解としての特徴づた．さらにこの特徴づけを用いて，$GL(4,\mathbb{R})$の極大放物型部分群の指標から誘導される退化主系列表現の一般Whittaker関数を具体的に計算し，それらのなす空間の次元を決定し，さらにそれらの基底を多変数の合流型超幾何関数を用いて明示的に書き下した．

より正確に設定を述べる．$\Theta=\{n_1,\ldots,n_L\}$で$0\,(=n_0)<n_1<\cdots<n_L=n$なる正整数の狭義上昇列をとる．そして$P_\Theta$で$\Theta$から決まる標準的な$G$の放物型部分群とし，$P_\Theta=M_\Theta A_\Theta N_\Theta$でその Langlands 分解とする．$\lambda\in(\mathfrak{a}_\Theta^*)_{\mathbb{C}}$を固定し，誘導表現$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{P_\Theta}^G(1_{M_\Theta}\otimes e^\lambda\otimes 1_{N_\Theta})$を

(球) 退化主系列表現と呼ぶ．表現空間は

$$C^\infty(G/P_\Theta,\lambda)=\{f\in C^\infty(G)\mid f(gp)=(1_{M_\Theta}\otimes e^\lambda\otimes 1_{N_\Theta})(p^{-1})f(g),\ g\in G,p\in P_\Theta\}$$

であり，G はこの空間に左移動で作用する．この表現を $\pi_{\Theta,\lambda}$ と書くことにする．また $X_{\Theta,\lambda}$ で K 有限ベクトル全体のなす $(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$ 加群とし，$X^*_{\Theta,\lambda}$ でその双対 $(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$ 加群とする．$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のなかの $\pi_{\Theta,\lambda}$ の零化イデアルを $I_\Theta(\lambda)=\{X\in U(\mathfrak{g})\mid R_Xf\equiv 0,\ f\in C^\infty(G/P_\Theta;\lambda)\}$ とする．$U\subset N$ を閉部分群として (η,V_η) で U の既約ユニタリ表現を取り，以下のような G への誘導表現を考える．$C^\infty_\eta(U\backslash G)=\{f\colon G\to V^\infty_\eta \text{ smooth}\mid f(ug)=\eta(u)f(g),u\in U,g\in G\}$，ここには G が右移動で作用する．

このとき以下の定理 (本論分 Theorem) が証明できる．

Theorem 1. $\lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ は $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ の元として *regular* かつ *dominant* とする．ゼロでない K 固定ベクトル $f_0\in X^*_{\Theta,\lambda}$ を取ってくる．このとき以下の線型写像は同型である．

$$\begin{array}{rccc}\tilde{\Phi}\colon & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C},K}(X^*_{\Theta,\lambda},C^\infty_\eta(U\backslash G)) & \xrightarrow{\sim} & C^\infty_\eta(U\backslash G/K,I_\Theta(\lambda)) \\ & W & \longmapsto & W(f_0)(g).\end{array}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&C^\infty_\eta(U\backslash G/K,I_\Theta(\lambda))\\&\quad=\{f\colon G\to V^\infty_\eta\ \textit{smooth}\mid f(ngk)=\eta(n)f(g),g\in G,n\in U,\ k\in K\\&\qquad\qquad\textit{and}\ R_Xf(g)=0,\ X\in I_\Theta(\lambda)\}\end{aligned}$$

である．

定理の仮定の下では $\pi_{\Theta,\lambda}$ の零化イデアル $I_\Theta(\lambda)$ の生成元が大島利雄氏によって具体的に決定されている．従って上の定理によって $GL(n,\mathbb{R})$ の退化主系列表現の一般 Whitaker 関数を特徴付ける微分方程式が具体的に構成できたことになる．

この Theorem 1 によって一般 Whittaker 関数を特徴付ける微分方程式が得られたので，次に $G=GL(4,\mathbb{R})$ として G の極大放物型部分群 $P_{1,4}$ と $P_{2,4}$ の指標から誘導された退化主系列表現に対して，$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(X_{\Theta,\lambda},C^\infty_\eta(U\backslash G))$，あるいは $C^\infty_\eta(U\backslash G/K,I_\Theta(\lambda))$ の具体的な構造を考える．ここで G の部分群 U とそのユニタリ表現 η は以下の仮定を満たすものを扱う．

1. U は N の閉部分群であり，η は U のユニタリ指標．

2. η の N への L^2 誘導表現 $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^N\,\eta$ は既約かつユニタリである．

この条件の下，$C^\infty_\eta(U\backslash G)$ の G 同型類を分類し，それら全てに対して $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)}(X_{\Theta,\lambda},C^\infty_\eta(U\backslash G))$ の次元を決定し，また $C^\infty_\eta(U\backslash G/K,I_\Theta(\lambda))$ の基底を一変数変形 Bessel 関数，二変数 Horn の合流方超幾何関数を用いて書き下した．