論文審査の結果の要旨

氏 名　 廣 恵 一 希

論文題目:Generalized Whittaker functions for degenerate principal series of $GL(4,\mathbb{R})$.
和訳： $GL(4,\mathbb{R})$ の退化主系列表現の一般 Whittaker 関数.

以下 $G = GL(4,\mathbb{R})$ を４次実一般線形群とし、その部分群である４次直交群 $K = O(4)$、狭義上三角群 N、対角行列からなる G の部分群の単位元の連結成分である群 A などを考える．慣用に従い、これらの群に対応する Lie 環を、対応するドイツ文字の小文字によって各々 $\mathfrak{g} = M_4(\mathbb{R})$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(4)$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ などで表す．また各々の複素化は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ などであらわすことにする．このとき岩澤分解は $G = KAN$ となる．

さて G の連続許容表現 (π, V) (たいていは既約か有限の組成列をもつもの) が与えられているとする．ここで表現空間は V は局所凸位相線型空間か、Hilbert 空間である．　これの代数化は、V_K を V の K 有限ベクトル全体のなす空間とするとき、そこに自然に誘導される $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群とする．

この表現の Whittaker 模型あるいは Whittaker 実現は次のように定義される．

極大冪単群である N のユニタリ指標 η に対して、G 上の C^∞ 級関数の空間

$$C^\infty_\eta(N\backslash G) = \{f \in C^\infty(G) \mid f(ng) = \eta(n)f(g)\ n \in N, g \in G\}$$

を考え，これを G の右準正則作用によって G の表現とみなし、π からそこへの連続 G-準同型の空間（絡空間、interwining space）

$$\mathrm{Hom}_G(V, C^\infty_\eta(N\backslash G)),$$

あるいは代数準同型の空間

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)}(V_K, C^\infty_\eta(N\backslash G))$$

を考える．V (resp.V_K) のこれら連続 (resp. 代数的) 準同型による像を V (resp.V_K) の Whittaker 模型と呼ぶ．また像の各元は G 上の関数となるので，それらを Whittaker 関数と呼ぶ．

極大冪単群 N のユニタリ指標のみならず、任意の既約ユニタリ表現 η に対しても同様の問題を考えたい．これは Kirillov 理論より、上での (N, η) の代わりに、より一般に閉部分群 $U \hookrightarrow N$ の既約ユニタリ指標から G への誘導表現を考え，そこへの V や V_K からの準同型の像を一般 Whittaker 模型，それらの像の各元を一般 Whittaker 関数と呼ぶ.

本論文では G の表現 (π, V) として退化主系列表現を考え，それらの一般 Whittaker 関数の動径成分を明示的な微分方程式（ある holonomic 系）の解として特徴づけた．さらにこの特徴づけを用いて，$GL(4,\mathbb{R})$ の極大放物型部分群の指標から誘導される退化主系列表現の一般 Whittaker 関数をべき級数や、古典的な特殊関数 (特に Bessel 関数) あるいはそれらを含む積分表示などによって具体的に計算した．この結果の直接の結論として解空間の次元を決定した.

この論文の手法は網羅的かつ包括であり、さらに特徴的で注目すべき結果として、たとえば、これまで全く別の文脈で研究されていた、Horn の 2 変数の合流型超幾何関数と Whittaker 模型との関係を明らかにした．これは興味深い新しい発見である．

偏微分方程式系の導出においては、大島利雄氏の退化主系列表現の零化イデアルの生成系に関する結果が、周到な準備の後に利用されている．当論文の手法は、より大きな次数 n のときの $GL(n,\mathbb{R})$ の場合にも一般化できると思われる．

このような理由から、この論文は得られた結果のみならず、用いられた手法が「標準化可能」と思われ、今後の研究のためにもその価値は大きいと思われる．

よって論文提出者　廣惠一希　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．