論文の内容の要旨

論文題目　Compactification of the homeomorphism group of a graph
（グラフの同相群のコンパクト化について）

氏　　名　山下　温

位相空間 X に対して，その自己同相写像の全体のなす群にコンパクト開位相を導入したものを $\mathcal{H}(X)$ で表す．X がコンパクト距離空間，ないし局所コンパクトかつ局所連結な可分距離空間である場合は，$\mathcal{H}(X)$ は位相群となる．X が与えられたときに，$\mathcal{H}(X)$ の位相的性質を調べることは古典的な general topology のテーマの一つである．X がコンパクト多様体である場合は $\mathcal{H}(X)$ は無限次元な，到るところ局所コンパクトでない空間をなす．他方で，1960 年代後半から 80 年代前半にかけての無限次元位相多様体論の研究によって，可分な無限次元ヒルベルト空間 ℓ^2 や閉区間の無限直積であるヒルベルト立方体 $Q = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$，あるいは局所的にこれらの空間をモデルとするような多様体（ℓ^2-多様体，Q-多様体）の位相について多くの知見が得られてきた．当時の一連の研究はコンパクト多様体 X に対して $\mathcal{H}(X)$ と ℓ^2-多様体との共通の位相的性質をいくつか見出しており，実際に $\mathcal{H}(X)$ が ℓ^2-多様体であることが予想されている．この予想は X が 2 次元以下の場合にのみ，正しいことが証明されており（ 1 次元については [1, p.202]，2 次元については [5], [4], [2]），3 次元以上では未解決のままで残されている．

無限次元多様体論のひとつの結果として，「任意の可分な Fréchet 空間は ℓ^2 と同相である」というものがある (Kadec-Anderson の定理 [1, p.189])．Q の稠密な部分集合として開区間の無限直積 $s = (-1, 1)^{\mathbb{N}}$ を考えよう．s は実数直線 $\mathbb{R}$ の可算直積 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同相であり，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は Fréchet 空間であるから，s は ℓ^2 と同相である．したがって，ℓ^2 を s と同一視して Q に埋め込んで考えれば，ℓ^2 のコンパクト化として Q が得られることが分かる．より一般に，ℓ^2-多様体 N は有限複体のホモトピー型をもつとき，Q-多様体 M をコンパクト化にもつことが知られる．更に，このとき対 (M, N) が次の性質をもつようにできる．「M の任意の点に対して，その開近傍 U と Q の開集合 V とを適当にとると，対 $(U, U \cap N)$ は対 $(V, V \cap s)$ と同相である.」この状況を，「コンパクト化 (M, N) は (Q, s)-多様体である」と言い表す．

さて，本論文では，グラフの自己同相写像の群のコンパクト化について調べる．ここでグラフとは，局所有限で，高々可算個の単体をもつ 1 次元以下の単体複体で単体分割されるような（局所コンパクトな可分距離）空間のことをいう．Γ をグラフとし，Γ の自己同相群 $\mathcal{H}(\Gamma)$ の単位元の連結成分を $\mathcal{H}_+(\Gamma)$ で表す．このとき 1 次元コンパクト多様体の同相群が ℓ^2-多様体になることから，$\mathcal{H}_+(\Gamma)$ が（Γ が無限個の孤立円をもつ場

合と，離散空間である場合とを例外として） ℓ^2-多様体になることが分かる．更に Γ が有限グラフであれば，$\mathcal{H}(\Gamma)$ も ℓ^2-多様体である．では，$\mathcal{H}_+(\Gamma)$ や $\mathcal{H}(\Gamma)$ のそれらの自然なコンパクト化であって (Q,s)-多様体をなすものがあるであろうか．本論文の著者は次のようにして自然に定義される $\mathcal{H}_+(\Gamma)$ ないし $\mathcal{H}(\Gamma)$ のコンパクト化について考察し，$\mathcal{H}_+(\Gamma)$ のコンパクト化については，それが (Q,s)-多様体をなすための必要十分条件を求めることができた．

再び一般に X をコンパクト距離空間，ないし局所コンパクトかつ局所連結な可分距離空間とする．位相群 $\mathcal{H}(X)$ の各元は X から X への連続写像であるから，写像のグラフを考えることができ，それは $X \times X$ の閉集合である．他方，$X \times X$ の閉集合全体のなす空間にはコンパクト距離空間となるような位相を次のようにして導入することができる．一般に Y を位相空間とするとき，Y の閉集合全体の集合 $\mathrm{Cld}^*(Y)$ の上に以下の形の部分集合で生成されるような位相を考える．

$$
\begin{aligned}
U^+ &= \{A \in \mathrm{Cld}^*(Y);\, A \cap U \neq \emptyset\} \qquad (U \text{ は } Y \text{ の開集合}),\\
(Y \setminus K)^- &= \{A \in \mathrm{Cld}^*(Y);\, A \subset Y \setminus K\} \qquad (K \text{ は } Y \text{ のコンパクト集合})
\end{aligned}
$$

このようにして定義される $\mathrm{Cld}^*(Y)$ 上の位相を Fell 位相といい ([3])，その位相を入れた $\mathrm{Cld}^*(Y)$ のことを $\mathrm{Cld}^*_F(Y)$ と表す．この状況で Y が局所コンパクトな可分距離空間であれば，$\mathrm{Cld}^*_F(Y)$ はコンパクト距離空間になることが知られている．さて，いま X は局所コンパクトな可分距離空間であるから，$X \times X$ もそうである．よって，$\mathrm{Cld}^*_F(X \times X)$ はコンパクト距離空間となり，その中に自己同相写像の群 $\mathcal{H}(X)$ が集合として埋め込まれていることになる．実際には，これが位相空間としての埋め込みになっている（Lemma 2.1）．したがって，$\mathcal{H}(X)$ ，あるいはその任意の部分群 $\mathcal{H}$ に対して，それらの $\mathrm{Cld}^*_F(X \times X)$ における閉包 $\overline{\mathcal{H}}_F(X)$ あるいは $\overline{\mathcal{H}}_F$ は，それぞれ $\mathcal{H}(X)$ あるいは $\mathcal{H}$ のコンパクト化をなす．

ここで X がグラフ Γ の場合を考えれば我々の考えている状況となる．同相写像の群 $\mathcal{H}(\Gamma)$ および $\mathcal{H}_+(\Gamma)$ の上のようなコンパクト化をそれぞれ $\overline{\mathcal{H}}_F(\Gamma)$，$\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma)$ とする．この論文の主結果は $\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma)$ に関するものであり，以下のように述べられる．グラフ Γ に含まれる単純閉曲線 J がループであるとは，Γ に含まれる（離散空間でない）グラフ Γ' であって，$\Gamma' \cap J$ が一点からなり，かつ $\Gamma = \Gamma' \cup J$ となるものが存在することである．また，円周 $\mathbb{T}$ に基点 $*$ を固定するとき，ある整数 $m \geqq 0$ に対して $\mathbb{T} \times \{1,\ldots,m\} \cup \{(*,0)\}$ のうち $\{*\} \times \{0,1,\ldots,m\}$ を一点につぶして得られる空間をブーケと呼ぶ．これは $m=0$ のときは一点であり，$m=1$ のときは円周 $\mathbb{T}$ に同相である．

定理 I (Theorem 1.1)**.** グラフ Γ の円周と同相な連結成分の個数を o_Γ，Γ の連結成分であって $\mathbb{R}$ ともブーケとも同相でないものの個数を s_Γ，Γ の $\mathbb{R}$ と同相な連結成分の個数とループの個数との和を l_Γ とする．このとき，次のような対としての同相写像が存在する．

$$
(\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma), \mathcal{H}_+(\Gamma)) \approx (Q^{s_\Gamma + o_\Gamma} \times (Q/\{\pm\mathbf{1}\})^{l_\Gamma} \times \mathbb{T}^{o_\Gamma}, s^{s_\Gamma + o_\Gamma + l_\Gamma} \times \mathbb{T}^{o_\Gamma}).
$$

但し，ここで $\pm\mathbf{1} = (\pm 1, 0, 0, \ldots) \in [-1,1]^{\mathbb{N}} = Q$.

系 II (Corollary 1.2)**.** 上の状況において，

(1) $(\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma), \mathcal{H}_+(\Gamma))$ が (Q,s)-多様体であるための必要十分条件は，$s_\Gamma + o_\Gamma \geqq 1$，$l_\Gamma = 0$ であり，かつ o_Γ が有限なことである．
(2) $\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma)$ が Q-多様体であるための必要十分条件は，$s_\Gamma + o_\Gamma \geqq 1$ であり，かつ $l_\Gamma + o_\Gamma$ が有限なことである．

上の定理 I の証明で基本的な先行結果は，以下のものである．

定理 A (酒井・上原 [6])**.** I を単位閉区間とする．対としての同相写像

$$
(\overline{\mathcal{H}}_+(I), \mathcal{H}_+(I)) \approx (Q, s)
$$

が存在する．

グラフ Γ の点のうち，$\mathbb{R}$ と同相な近傍をもたない点の全体を $\Gamma^{(0)}$ とし，$\Gamma \setminus \Gamma^{(0)}$ の連結成分の全体を $\{E_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ と表す．E_λ の閉包を X_λ とし，$F_\lambda = X_\lambda \setminus E_\lambda$ とおく．このとき，$\mathcal{H}(X_\lambda, F_\lambda) = \{h \in \mathcal{H}(X_\lambda) ; h|_{F_\lambda} = \mathrm{id}\}$ の単位元の連結成分 $\mathcal{H}_+(X_\lambda, F_\lambda)$ のコンパクト化を，定理 A を利用して求めることができる．この議論が本文の §3 で行われている．次に，$\mathcal{H}_+(\Gamma)$ のコンパクト化は，いま求めた $\mathcal{H}_+(X_\lambda, F_\lambda)$ のコンパクト化の直積に分解できることを示す．これについての議論は §4 で行われる．以上が，定理 I の証明のあらすじである．

同相群の単位元の連結成分 $\mathcal{H}_+(\Gamma)$ のコンパクト化についての結果は以上である．同相群そのもの $\mathcal{H}(\Gamma)$ のコンパクト化については，Γ が一般のグラフの場合は簡明な記述は望めそうにない．しかし，Γ が円周 $\mathbb{T}$ の場合は以下が成り立つ．$\mathbb{D}^2$ により，複素平面内の単位閉円板 $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leqq 1\}$ を表し，$\mathbb{T}$ をその境界の単位円周 $\{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ とする．$Q' = Q \times \mathbb{D}^2$，$s' = s \times (\mathbb{D}^2 \setminus \mathbb{T})$ とおく．対 (Q', s') は対 (Q, s) に同相である．更に，0 を $Q = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ の座標がすべて 0 である点とし，$Q' \times \mathbb{T}$ に含まれるトーラス T_0 を $T_0 = \{0\} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ で定義する．

定理 III (Theorem 3.18)**.** 対としての同相写像

$$(\overline{\mathcal{H}}_F(\mathbb{T}), \mathcal{H}(\mathbb{T})) \approx (Q' \times \mathbb{T} \cup_H Q' \times \mathbb{T}, s' \times \mathbb{T} \sqcup s' \times \mathbb{T})$$

が存在する．但し，H は T_0 から T_0 への同相写像であって，

$$H(0, u, v) = (0, u, u^{-2} v^{-1}) \quad (u, v \in \mathbb{T})$$

で定義されるものである．

酒井と上原は論文 [6] において，任意の有限グラフ Γ に対して $(\overline{\mathcal{H}}_F(\Gamma), \mathcal{H}(\Gamma))$ が (Q, s)-多様体になるという結果を発表したが，上の結果はこれが誤りであったことを示している (Remark 1.3).

最後の節である §5 においては，2 次元以上の多様体の同相群を同様にコンパクト化した場合についての一つの否定的な結果を述べた．それは次の通りである．

定理 IV (Theorem 1.4)**.** M を 2 次元以上の位相多様体とすると，$(\overline{\mathcal{H}}_F(M), \mathcal{H}(M))$ は (Q, s)-多様体ではない．

参考文献

[1] Czesław Bessaga and Aleksander Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology,* Monografie Matematyczne, Tom 58, Warsaw, 1975.

[2] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *Separable complete ANRs admitting a group structure are Hilbert manifolds,* Topology Appl. **12** (1981), no. 3, 229–235.

[3] J. M. G. Fell, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space,* Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 472–476.

[4] R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract,* Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.

[5] W. K. Mason, *The space of all self-homeomorphisms of a two-cell which fix the cell's boundary is an absolute retract,* Trans. Amer. Math. Soc. **161** (1971), 185–205.

[6] Katsuro Sakai and Shigenori Uehara, *A Q-manifold compactification of the homeomorphism group of a graph,* Bull. Polish Acad. Sci. Math. **45** (1997), no. 3, 281–286.