論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　　　山　下　　温

同相群の位相空間としての性質は、１９６０年代にアンダーソンにより研究が開始されたが、任意のコンパクトな多様体の同相群が、可分ヒルベルト空間をモデルとする多様体の構造をもつかどうかという基本的な問題も、１次元、２次元の場合にのみ正しいことが知られていて３次元以上の多様体では未解決である。

論文提出者は、この同相群がそのコンパクト化の中でどのようなふるまいをするかを調べている。可分ヒルベルト空間は、開区間 $(0,1)$ の可算個の直積 $s=(0,1)^{\mathbf{N}}$ と同相であり、そのコンパクト化の一つにヒルベルト立方体 $Q=[0,1]^{\mathbf{N}}$ をとることができる。同相写像の空間は、写像の空間のコンパクト化であるフェル・コンパクト化の中にコンパクト化されると考えられる。

もしも、同相群の空間がそのコンパクト化とともに自然な多様体構造をもてば、同相群 $\mathcal{H}$ とそのコンパクト化 $\overline{\mathcal{H}}_F$ は、空間対として (Q,s) 多様体である可能性がある。論文提出者の重要な発見は、これが成立しているのは非常にまれであるということである。

論文提出者山下温が対象としているのは、主に、1次元局所有限可算単体複体の同相群である。論文では、実際に局所有限可算グラフ Γ の同相群の恒等写像成分 $\mathcal{H}_+(\Gamma)$ とそのフェル・コンパクト化 $\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma)$ のなす空間対 $(\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma),\mathcal{H}_+(\Gamma))$ の位相型を研究し、これを主定理において、決定している。

定理. グラフ Γ の円周成分の数を o_Γ, 開区間成分の数とループの数の和を l_Γ, Γ の開区間ともブーケとも同相でない連結成分の数を s_Γ とするとき、$(\overline{\mathcal{H}}_{+,F}(\Gamma),\mathcal{H}_+(\Gamma))\approx((Q/\{\pm\mathbf{1}\})^{l_\Gamma}\times Q^{s_\Gamma+o_\Gamma}\times\mathbf{T}^{o_\Gamma}, s^{l_\Gamma+s_\Gamma+o_\Gamma}\times\mathbf{T}^{o_\Gamma})$ となる。

一方、論文提出者は、２次元以上の多様体の同相群とそのフェル・コンパクト化のなす空間対は、相対的に局所0連結でないことを具体的に同相の族を具体的に構成することにより示し、この空間対は (Q,s) 多様体ではないことを証明している。これは、非常に一般的な結果であり、同相群とそのフェル・コンパクト化のなす空間対は、必ずしも良い空間とならないことを示している。

これらの結果の証明の過程で、論文提出者は先行する論文の誤りを正している。さらに、円周 $\mathbf{T}$ の同相の全体からなる円周の同相群 $\mathcal{H}(\mathbf{T})$) に対して、$\overline{\mathcal{H}}_F(\mathbf{T})$ は連結になることを示し、$(\overline{\mathcal{H}}_F(\mathbf{T}),\mathcal{H}(\mathbf{T}))$ を決定している。

このように、論文提出者の結果は同相群のコンパクト化のなかで同相群を考察する研究において決定的な意味を持つ重要なものである。よって論文提出者山下温は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。