論文の内容の要旨

論文題目：On the Navier-Stokes equations in a rotating frame and the functional-differential equations of advanced type - a Fourier analysis approach
（フーリエ解析的手法による回転場内の流体方程式と進み型関数微分方程式の考察）

氏名　米田　剛

本博士論文は第１部、第２部の２部で構成されている．第１部では概周期関数を初期値としたコリオリ力付き Navier-Stokes 方程式の大域可解性について，第２部では或る進み型関数微分方程式の解の構成について述べる．

第１部：概周期関数を初期値としたコリオリ力付き Navier-Stokes 方程式の大域可解性について

本論文ではコリオリ力付き Navier-Stokes 方程式の大域可解性について論じた．コリオリ力とは地球の自転によって引き起こされる力のことをいい，台風などの発生原理を追求する際にはこの力は無視できない．現在，気象変動などの地球規模の流体を解析するときには，コリオリ力付きの流体方程式を扱うのが主流である．最近はコンピュータを用いたシミュレーションによる気象変動などの研究が盛んにおこなわれており，工学的な技術としても重要な方程式である．この方程式の先駆的な研究として，Babin-Mahalov-Nicolaenko は 1997 年に「初期値が周期関数における時間大域解の存在」を示した．この問題に対して著者は初期値が概周期関数の場合の大域解の存在，より具体的には任意の時間区間内における滑らかな解の一意存在を示した（ただし，コリオリ力は最初に設定する任意の長さの存在時間に依存する）．コリオリ力付き Navier-Stokes 方程式の非線形項は，周波数集合の相互作用を分析することでコリオリ力に依存する部分と依存しない部分に分けることが出来る．Babin-Mahalov-Nicolaenko で行われているこの分解法に対して，私は２進数に基づく作用素族を導入して計算がより見やすくなるようにした．より具体的に

非線形項は以下の５つの部分に分解できる．1，二次元のみの相互作用の部分，2，反対称性を持ち二次元が三次元へ媒介する部分，3，反対称性を持たず二次元が三次元へ媒介する部分，4，三次元のみの相互作用の部分，5 共鳴しない部分（1～4 は共鳴する部分）．コリオリ力に依存する５の部分を取り除いた非線形項（1～4 の部分）をもつ方程式は２次元的なので，ここでは extended 2D-NS という（E2DNS）．その方程式の解はコリオリ力に依存しない．この E2DNS が滑らかな大域解を持つということを示すのが，証明の鍵となる．Babin-Mahalov-Nicolaenko は E2DNS のエネルギー不等式を構成してその方程式の大域解の存在を導いているが，扱っている関数を周期関数から概周期関数へと一般化すると，そういったエネルギー不等式が適用出来なくなる．そこで私は Giga-Inui-Mahalov-Matsui が 2005 年に初めて Navier-Stokes 方程式へと応用した FM_0 空間を使った．FM_0 空間とは，原点に点質量（デルタ測度）を持たない有限ラドン測度のフーリエ逆変換像全体である．ノルムはその有限ラドン測度の全変動とする．FM_0 空間は初期値が概周期関数であっても解の存在時間がコリオリ力に依存しない関数空間であり，mild solution を扱うには適している関数空間である．私はエネルギー不等式を構成する代わりに mild solution を使って E2DNS の大域解の存在を導いた．なお，この研究テーマは Clay 財団が提起した未解決問題にも関連している．Clay 財団は 21 世紀に解かれるべき数学の未解決問題を７つあげている．そのうちのひとつが３次元 Navier-Stokes 方程式の滑らかな時間大域解の一意存在または解の爆発を，初期値の大きさの条件を付けずに導くことである．したがって大域可解性はコリオリ力のあるなしに関わらず自明ではない．コリオリ力がありかつ大きな初期値である場合において，初期値が空間無限で減衰していることを仮定すれば，コリオリ力を大きくすることにより顕著になる分散効果を生かすことが出来るようになる．それを使って Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier は 2006 年に時間大域解の存在を導いた．しかしながら初期値が概周期的な場合にはそういった分散効果はなく，この意味でも本結果は新しい．

第２部：進み型関数微分方程式の解の構成について

著者はフーリエ解析では重要な概念である「スプラインウェーブレット」からヒントを得て，その変形を用いることにより「走行中の電車のパンダグラフと架線との接触によって起こる複雑な振動を表現している或る進み型関数微分方程式」の解の構成をおこなった．このように解を具体的に構成し，更に数値計算してグラフ化する研究は皆無であった．これまでに知られている結果は，解の存在や漸近挙動に関するものが主である．代表的な研究として，1972 年の Kato（加藤敏夫）の研究や 1971 年の Kato と Mcleod の研究が挙げられる．これらはその方程式の解の漸近解について研究しているが，具体的な解の構成までには至っていない．フーリエ解析的手法がそのような微分方程式に応用されたのは著者の試みが最初である．扱った方程式は以下のとおりである．

$$f'(x) = af(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 1, \quad a \neq 0, \quad \text{with} \quad f(0) = 0.$$

ここで $a = 2, \lambda = 2$ の場合の解の作り方の概要を述べておく．まず $\hat{h}(\xi) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-i\xi/2^k})/2i}{i\xi/2^k}$ とおく．この関数は方程式 $i\xi\hat{h}(\xi) = 2(1 - e^{-i\xi/2})\hat{h}(\xi/2)$ を満たすので，$\hat{h}$ のフーリエ逆変換 h は $h'(x) = 4f(2x) - 4h(2x-1)$, $h(0) = 0$ という方程式を満たす．更にこの関数 h が滑らかで，その台が区間 $[0,1]$ に含まれることも確かめられる．ここで

$$\hat{f}(\xi) := \lim_{N\to\infty} \hat{h}(\xi) \prod_{j=0}^{N} (1 - e^{-i2^j\xi})$$

と置く．すると関数 $\hat{f}$ のフーリエ逆変換が，その求めたい方程式の解となる（ここでは収束の意味に関して注意を要する）．