

論文内容の要旨

Accurate Numerical Computation for Floquet Multipliers of

Periodic Orbits of Ordinary Differential Equations

常微分方程式の周期軌道と Floquet 乗数の高精度数値計算法

濡木 融

1 はじめに

理工学の分野では、連続的に時間変化する自然現象や社会現象等を体系的に理解するために、微分方程式によるモデル化がしばしば用いられる。本研究では、次のような常微分方程式の周期軌道の安定性解析について考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ with } f(t, x) = f(t+T, x) \quad (1)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^N$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ は C^2 級写像であるとする。 f が x に関して非線形である場合、方程式 (1) の解 x の挙動は、パラメータの変化で大きく変化する、すなわち分岐現象を示すことがある [2]。この分岐を理解するために、平衡点や周期軌道等、特徴的な解の構造のパラメータに対する変化を調べる。

(1) はベクトル場 f が時間に依存する非自律系の方程式である。 $x(t_0) = x_0$ を初期条件とする (1) の解を $x(t) = \varphi_{t_0}^{t-t_0}(x_0)$ と表すとする。周期 T の周期軌道は $x(t_0+T) = x_0$ を満たすので、周期軌道の条件は次のように表すことができる。

$$\varphi_{t_0}^T(x_0) - x_0 = 0 \quad (2)$$

周期軌道 $x(t)$ の摂動 $v(t)$ は、 $v(t_0) = v_0$ であるとき、次のような変分方程式の行列解 $X_0(\tau) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($\tau = t - t_0$) を用いて $v(t) = X_0(\tau)v_0$ と表される。

$$\frac{dX_0}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t_0+\tau, x=\varphi_{t_0}^\tau(x_0)} X_0(\tau) \quad (3)$$

ここで、初期値 $X_0(0)$ としては通常単位行列 I が用いられる。周期軌道の安定性は、 $X_0(T)$ の固

有値 λ_j ($j=1, 2, \dots, N$)、すなわち Floquet 乗数を用いて調べられる。しかし、既存の手法では Floquet 乗数の誤差が大きい場合があることが報告されている [1, 3]。この問題は陰的 Runge-Kutta 法等を用いて微分方程式の計算精度を上げても解決できない。

本研究では変分方程式の反復的解法の構成と、変分方程式の初期値を $X_0(T)$ の固有ベクトルを用いて設定することで高精度に Floquet 乗数を求める手法を提案し、その有効性を数値実験の例によって示す。

2 周期軌道の数値的安定性解析とその問題点

周期軌道の計算方法はすでにいくつか提案されている [2]。本研究の手法は shooting 法に基づいているので、ここでは比較的簡便かつ広く使われている simple shooting 法について考える。非自律系の場合、周期 T は既知であるので、未知変数は x_0 である。simple shooting 法は、周期解の条件 (2) をみたす x_0 を Newton 法等の反復法によって求める。

例として、次式で定義される Mathieu 方程式の $p = 2, 20, 40$ における周期軌道を図 1(a), (b) に示す。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -(1 + p \cos t) \sin x \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $x = (x, y)^T$ 。図 1(a) より、周期軌道は p の増加とともに、状態空間の原点に存在する平衡点 x_* に近づくことが分かる。また、 x_* 付近を

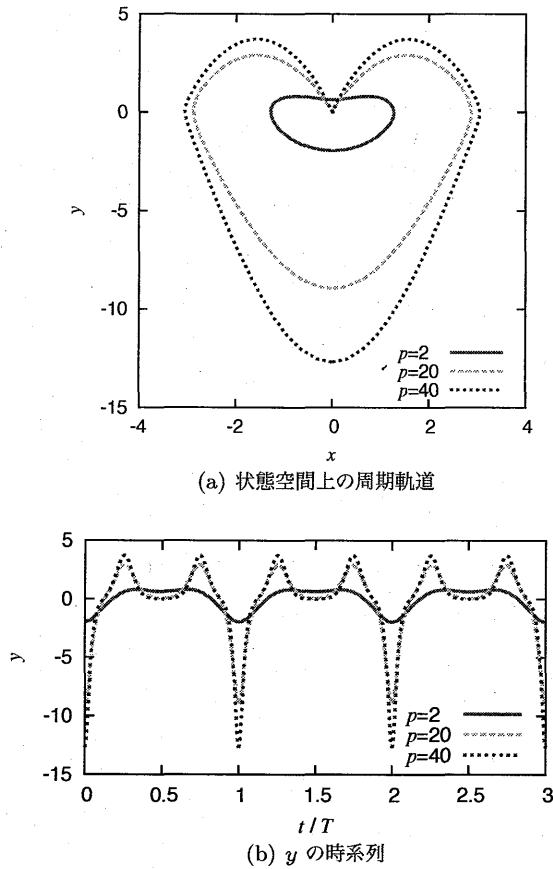


図1 提案手法による Mathieu 方程式 (4) の周期軌道の計算結果. T : 周期. p : 方程式のパラメータ.

通る周期軌道上の解は, \mathbf{x}_* 付近ではゆっくり変化し, それ以外では比較的速く変化している.

次に, Floquet 乗数の計算方法を説明する. 既存の手法は, (2) を用いて求めた周期軌道を変分方程式 (3) に代入し, その変分方程式 (3) を初期値問題として Runge-Kutta 法等を用いて数値的に解くことにより $\mathbf{X}_0(T)$ を求める. さらに $\mathbf{X}_0(T)$ の固有値を標準的な手法で解くことにより Floquet 乗数を求める.

図 2(a) に既存の手法で計算した Mathieu 方程式 (4) の Floquet 乗数 λ_1, λ_2 を示す. Floquet 乗数の比 $|\lambda_1|/|\lambda_2|$ が p とともに急速に増加し, $p > 20$ で λ_2 が正しく求められていないことが分かる. この例が示すように, 既存の手法を用いると Floquet 乗数の誤差が大きくなる場合があることは, 他の研究でも報告されている [1, 3].

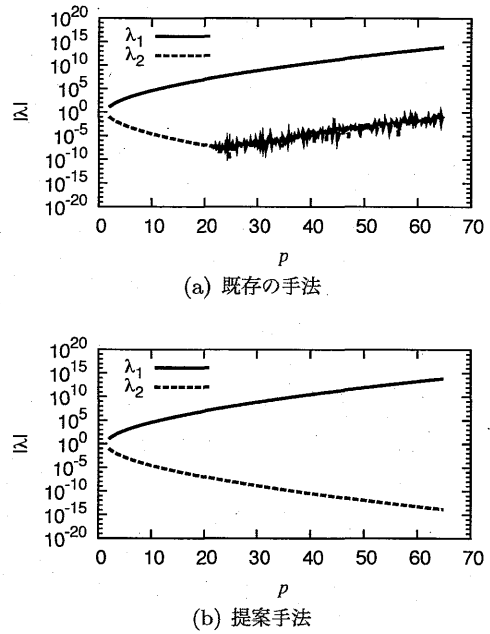


図2 Mathieu 方程式 (4) の Floquet 乗数 λ_j ($j = 1, 2$) の計算結果の比較. p : 方程式のパラメータ.

3 提案手法

既存の Floquet 乗数の計算方法の問題点として, 以下の2点が考えられる.

- (i) 変分方程式 (3) の解 $\mathbf{X}_0(T)$ を計算誤差の制御が難しい初期値問題として解いている点
- (ii) 絶対値が大きな成分を含む $\mathbf{X}_0(T)$ の固有値を計算する際の行列の変形における丸め誤差

本研究では, これら二つの問題点に対して, それぞれ次のような対策を検討した.

- (I) 変分方程式の反復的解法の構成
- (II) 変分方程式の初期条件として $\mathbf{X}_0(T)$ の固有ベクトルを用いることによる固有値計算における丸め誤差の低減

図 2(b) は, 以下で説明する本研究の提案手法で求めた Mathieu 方程式 (4) の Floquet 乗数の計算結果を表している. 図 2(a) と比較すると, 既存の手法より提案手法の方が精度の良い結果を与えていることがわかる.

3.1 変分方程式の反復的解法

本研究では、常微分方程式の解 $x(t) = \varphi_{t_0}^{t-t_0}(x_0)$ の次のような性質に着目した。

$$\varphi_{t_0}^{T+\sigma} = \varphi_{t_0+\tau}^{\sigma} \circ \varphi_{t_0}^T \quad \text{for } \tau, \sigma \in \mathbb{R} \quad (5)$$

これは力学系の定義としても用いられる一般的な性質である。(5)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}^{T-s}(x_0) &= \varphi_{t_0+T}^{-s} \circ \varphi_{t_0}^T(x_0) \\ &= \varphi_{t_0+T}^{-s}(x(t_0+T)) \end{aligned} \quad (6)$$

周期軌道の場合は $x(t_0+T) = x_0$ であるので、 x_0 に関する次のような条件が得られる。

$$g_0(x_0) = \varphi_{t_0}^{T-s}(x_0) - \varphi_{t_0+T}^{-s}(x_0) = 0 \quad (7)$$

変分方程式 (3) の解 $X_0(\tau) = \Psi_{t_0, x_0}^{\tau}(X_0(0))$ も (6) と同じ性質 $\Psi_{t_0, x_0}^{T+\sigma} = \Psi_{t_0+\tau, x(t_0+\sigma)}^{\sigma} \circ \Psi_{t_0, x_0}^T$ を持つため、 $X_0(T)$ に関する条件が次のように得られる。

$$\begin{aligned} Q_0(x_0, X_0(T)) \\ = \Psi_{t_0, x_0}^{T-s}(X_0(0)) - \Psi_{t_0+T, x_0}^{-s}(X_0(T)) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 O は零行列を表し、 $X_0(0) = I$ とする。 s の値は自由に選べるが、本研究では簡単のため $s = T/2$ とした。条件 (7), (8) に対する反復法を用いることで、 x_0 だけでなく $X_0(T)$ の精度も収束条件を用いて制御できる。

3.2 $X_0(T)$ の固有ベクトルを用いた変分方程式の初期値の設定

3.1 の反復法を用いて精度の良い $X_0(T)$ を得ることができるが、 $X_0(T)$ の成分の絶対値が大きくなると、固有値を計算する段階で生じる丸め誤差のために Floquet 乗数が正しく求まらない場合があった。そこで、以下のような変分方程式の初期値として $X_0(T)$ の固有ベクトルを用いる方法を考えた。

Floquet 乗数 λ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) に付随する $X_0(T)$ の正規固有ベクトルを $v_{j,0}$ とすると、

$$\lambda_j v_{j,0} = X_0(T)v_{j,0} = v_j(t_0+T) \quad (9)$$

のように表すことができる。上式の左から $v_{j,0}$ の共役ベクトルをかけると次式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \langle v_{j,0}, v_j(t_0+T) \rangle \\ &= \langle v_{j,0}, \psi_{t_0, x_0}^T(v_{j,0}) \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\psi_{t_0, x_0}^T(v_{j,0}) := \Psi_{t_0, x_0}^T(I)v_{j,0}$ 、また、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表す。

(10) は行列の変形を必要としないため、通常の固有値計算で生じる丸め誤差は防げる。したがって、 $v_{j,0}$ の精度が良ければ Floquet 乗数 λ_j も高精度に計算できる。そこで、 $v_{j,0}$ を精度よく求めるために 3.1 の反復法を以下のように修正した。変分方程式の初期値 $X_0(0)$ は正則であればいいので、互いに独立な N 個の固有ベクトル $v_{j,0}$ を用いて $\hat{X}_0(0) = (v_{1,0} \cdots v_{N,0})$ を構成する。このとき、 $\hat{X}_0(T)$ は $\hat{X}_0(0)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{X}_0(T) &= (\psi_{t_0, x_0}^T(v_{1,0}) \cdots \psi_{t_0, x_0}^T(v_{N,0})) \\ &= (v_{1,0} \cdots v_{N,0}) \text{diag } \lambda_j \\ &=: \hat{X}_0(0) D_0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、対角行列 D_0 の各 (j, j) 成分 λ_j は、(10) より x_0 と $\hat{X}_0(0)$ の第 j 列 $v_{j,0}$ に依存する。したがって、(8) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} Q_0(x_0, \hat{X}_0(0)) \\ = \Psi_{t_0, x_0}^{T-s}(\hat{X}_0(0)) - \Psi_{t_0+T, x_0}^{-s}(\hat{X}_0(0) D_0) \end{aligned} \quad (12)$$

以上より、条件 (7), (12) を満たす未知変数 x_0 と $\hat{X}_0(0)$ 、すなわち $X_0(T)$ の固有ベクトル $v_{j,0}$ を反復法で求め、(10) を用いて Floquet 乗数を計算することができる。本研究では、まず条件 (7) を満たす周期軌道として x_0 を求め、つぎに x_0 を (12) に代入して $\hat{X}_0(0)$ を求めた。また、反復法で用いられる shooting 法の精度を上げるために、 $t_0 < t_1 < \cdots < t_M < t_{M+1} = t_0 + T$ のように周期軌道を複数の区間に分割し、multiple shooting 法を適用した。反復法の収束条件は次のように与えた。

$$d_1 := \|g_0(x_0)\| < \delta_1 \quad (13)$$

$$d_2 := \max_{1 \leq j \leq N} \|q_j\| < \delta_2 \quad (14)$$

ここで、 q_j は $Q_0(x_0, \hat{X}_0(0))$ の第 j 列ベクトルを表す。本研究の数値実験では、 $\delta_1 = \delta_2 = 10^{-6}$ とした。

3.3 Floquet 乗数の計算精度の指標

Floquet 乗数はどの時刻 t_k ($k = 0, 1, \dots, M$) から一周期を考えても理論的には等しい。しかし、一般に、 $\mathbf{X}_k(T)$ の各固有値 $\lambda_{j,k}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) の実際の計算結果は互いに異なる。そこで、本研究では Floquet 乗数 λ_j の精度の指標として、次式 $R(\lambda_j)$ を用いた。

$$R(\lambda_j) = \frac{|\max_{0 \leq k \leq M} \lambda_{j,k} - \min_{0 \leq k \leq M} \lambda_{j,k}|}{\max_{0 \leq k \leq M} |\lambda_{j,k}|} \quad (15)$$

4 数値実験の例

Mathieu 方程式 (4) は、非自律系であるが、状態空間 (x, y) の原点に平衡点を持つ。 p の増加とともに平衡点に近づく周期軌道とその Floquet 乗数を求めた。図 2 (a), (b) に従来の手法と提案手法による Floquet 乗数 ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$) の計算結果の比較を示す。軌道の分割数は $M+1=50$ とした。提案手法では $p > 20$ でも正確な λ_2 が得られた。

図 3(a), (b) は Floquet 乗数の精度の指標 $R(\lambda_j)$ の比較を示す。従来の手法では p の増加とともに $R(\lambda_2)$ が急速に増加したが、提案手法では $R(\lambda_1)$ と $R(\lambda_2)$ のどちらもほぼ 0 に抑えられた。これは、提案手法の有効性を示している。

また、提案手法はわずかな修正によって、ベクトル場 f が時間に依存しない自律系に対しても適用することができる。本論文では、3次元自律系の FitzHugh-Nagumo 方程式に対しても数値実験を行い、提案手法によって高精度な Floquet 乗数が得られることを確認した。

提案手法の計算時間は、どちらの計算例に対しても既存の手法の 1.5 倍未満だった。計算量に対する詳細な考察は行っていないが、今回行った数値実験の範囲では、実用的な計算時間で高精度な Floquet 乗数が得られた。

5 まとめ

本研究では、常微分方程式の周期軌道の数値的安定性解析について考えた。周期軌道の安定性は、変分方程式の解を用いて定義される Floquet 乗数を用いて調べることができる。Floquet 乗数

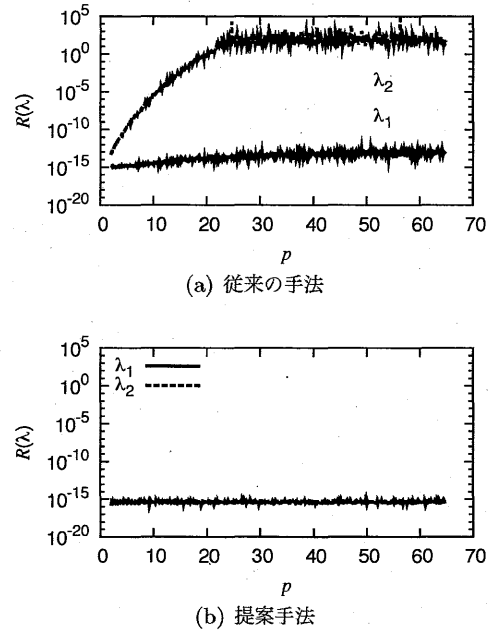


図 3 Mathieu 方程式 (4) の Floquet 乗数 λ_j ($j = 1, 2$) の計算精度の比較。 p : 方程式のパラメータ。 $R(\lambda_j)$: (15)。

の計算方法はすでにいくつか提案されているが、本研究ではそれらの問題点を整理し、改良手法を提案した。提案手法のアイデアは、変分方程式に対する反復法の構成と Floquet 乗数に付随する固有ベクトルを用いた固有値計算である。数値実験により、既存の方法では正確に求めることができなかった Floquet 定数を、提案手法により実用的な計算時間で精度よく求めることができることがわかった。

参考文献

- [1] T. Fairgrieve and A. Jepson, "OK Floquet Multipliers," SIAM Journal on Numerical Analysis, vol.28, no.5, pp.1446–1462, 1991.
- [2] Y. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory, Springer, 2004.
- [3] K. Lust, "Improved numerical Floquet multipliers," International Journal of Bifurcation and Chaos, vol.11, no.9, pp.2389–2410, 2001.